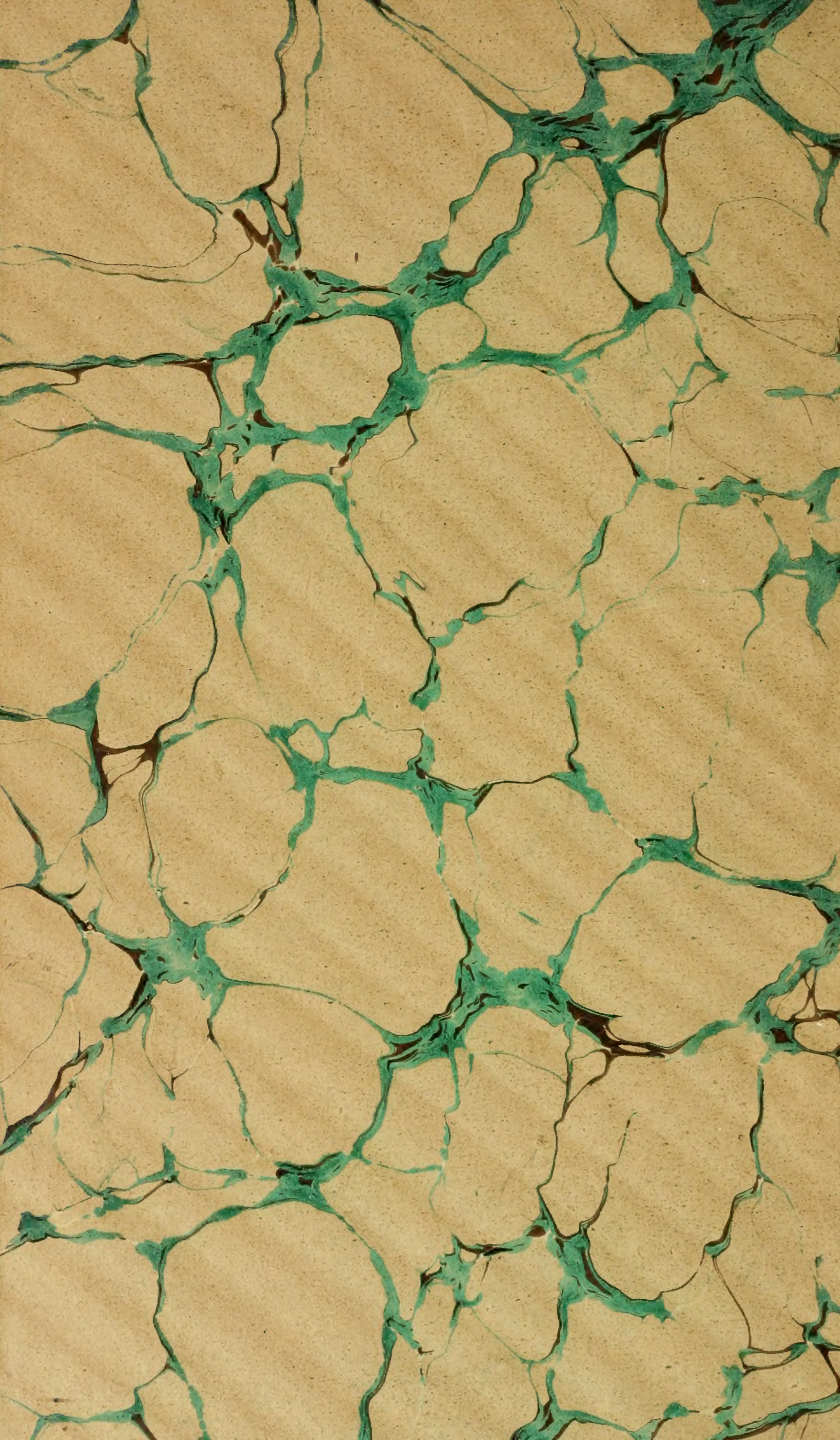






NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1876.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,

Quai des Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE.

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME QUINZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, nº 55.

—

1876.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

PROBLÈMES SUR L'ELLIPSE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. *Sur la construction géométrique des normales à une conique.* — Dans une Note ayant pour objet la solution du problème d'abaisser une normale sur l'ellipse, M. Painvin (*) se sert d'un théorème extrait d'un Mémoire de M. Smith *Sur quelques problèmes cubiques et quadratiques*. L'emploi de ce théorème me paraît inutile, et je pense que la solution suivante est plus simple que la solution indiquée.

Soit P (α, β) le point d'où l'on veut abaisser les normales à l'ellipse; si du sommet A on abaisse des perpendiculaires sur les normales, elles rencontrent la courbe en quatre points situés sur une circonférence, et la construction de celle-ci résout immédiatement la question proposée. On trouvera dans l'article cité la construction de l'axe radical de cette circonférence et du cercle homographique, et ainsi l'on déterminera une première droite contenant le centre. L'ordonnée y_0 du centre de cette circonférence a pour expression [*voir* la

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 348.

formule (II), p. 351 de l'endroit cité]

$$y_0 = 2\frac{a\alpha\beta}{c^2}.$$

Soit D le centre de courbure du sommet A; joignons le point D à la projection du point P sur l'axe des y, et, par la projection de ce point sur l'axe des x, menons une parallèle qui rencontre l'axe des y en Q; l'ordonnée cherchée y_0 sera le double de OQ.

2. *Sur la corde normale minima.* — Pour déterminer la position de la corde normale de longueur minima, on peut employer la remarque suivante, et j'ignore, en raison de sa simplicité, si cette remarque est nouvelle. Supposons une ellipse dont les dimensions sont telles que la développée la rencontre en des points réels; on a $a > b\sqrt{2}$. Désignons par A l'un des points d'intersection, par AB la tangente à la développée normale à l'ellipse en B, par A′B′ une tangente voisine, par A′ le point de contact avec la développée, extérieur à l'ellipse et sur la même branche que A, par B′ le pied de la normale, et par C l'autre point d'intersection de A′B′ avec l'ellipse. On a

$$\text{arc}\,A'A + AB = A'C + CB',$$

et, puisque l'on a

$$\text{arc}\,A'A > A'C,$$

il en résulte, car la démonstration s'applique encore si A′ est intérieur à l'ellipse,

$$B'C > AB,$$

et ainsi AB est la corde normale minima.

Le raisonnement s'applique d'ailleurs à la recherche de la longueur maxima ou minima de la normale à une courbe donnée C comptée de son pied jusqu'à son point d'intersection avec une courbe donnée C′. Les tangentes

à la développée de la courbe C en ses points d'intersection avec C′ sont en général des normales maxima ou minima. On ne peut rien conclure par ce qui précède, lorsque la courbe C′ coupe la développée de C à angle droit. On doit encore tenir compte des affections singulières que présentent ces trois courbes, et plus particulièrement des points de rebroussement de la développée.

3. *Sur le triangle inscrit et concentrique à l'ellipse.* — En désignant par α, β, γ les angles excentriques ou paramètres angulaires des sommets d'un triangle inscrit à l'ellipse, les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont données par les équations (*)

$$\frac{ax}{c^2} = +\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2},$$

$$\frac{by}{c^2} = -\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}.$$

Si le triangle est concentrique à l'ellipse, on a

$$\gamma-\beta=\beta-\alpha=\frac{2\pi}{3}.$$

Cela posé, la formule

$$\begin{aligned}\cos^2 p\cos^2 q\cos^2 r+\sin^2 p\sin^2 q\sin^2 r\\ =\frac{1}{4}+\frac{1}{8}[\cos 2(p-q)+\cos 2(q-r)+\cos 2(r-p)]\\ +\frac{1}{8}[\cos 2(p+q)+\cos 2(q+r)+\cos 2(r+p)]\end{aligned}$$

(*) SALMON, *Traité des sections coniques*, p. 306 de la traduction française. Nous ferons observer que cette dénomination d'*angle excentrique* est au moins bizarre. Cet angle porte, il est vrai, en Mécanique céleste, le nom d'*anomalie excentrique*, parce qu'il n'a point son sommet au foyer de l'orbite elliptique d'une planète, occupé par le *centre* du Soleil; mais cette dénomination n'a aucune raison d'être en Géométrie.

donne immédiatement

$$\left(\frac{4ax}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{4by}{c^2}\right)^2 = 1.$$

Le lieu du point d'intersection des hauteurs décrit un lieu homothétique (c'est la question 1173). On peut arriver plus simplement au résultat précédent; mais si j'ai opéré ainsi, c'est afin de donner une application de la formule trigonométrique employée ci-dessus.

Remarque. — La question de la corde normale minimum a été traitée (2e série, t. VII, p. 523, année 1868). Elle se trouve aussi traitée de même dans les *Problèmes* de M. Lonchampt.

DE LA TRISECTION DE L'ANGLE A L'AIDE DU COMPAS SPHÉRIQUE

(voir 2e série, t. III, p. 222);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Dans une lettre de Descartes à Mersenne, en date du 8 octobre 1629, on trouve le passage suivant : « De diviser les cercles en 27 et 29, cela se peut mécaniquement, mais non point géométriquement; il est vrai qu'il se peut en 27, par le moyen d'un cylindre, encore que peu de gens en puissent trouver le moyen, mais non pas en 29, et, si l'on m'en veut envoyer la démonstration, j'ose vous promettre de faire voir que cela n'est pas exact. »

La construction des polygones réguliers de 3^n côtés se déduit du principe suivant, qui résout le problème de la *trisection de l'angle* en se servant de figures décrites à l'aide d'un compas sur la surface d'un cylindre de révolution. Soient, en effet, ABC la base d'un cylindre de

rayon supposé égal à l'unité, A l'origine des arcs, B et C les extrémités de l'arc a donné et de l'arc supplémentaire. Du point B comme centre, on décrit sur la surface du cylindre une courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point B; sur la génératrice passant par le point C, on prend un point D dont l'ordonnée est égale au cosinus de l'arc donné, et de ce point D, comme centre, on décrit sur la surface du cylindre une seconde courbe sphérique passant par le point diamétralement opposé au point C. Ces deux courbes se coupent en quatre points, situés dans un plan, dont les ordonnées sont égales à $2\cos a$ et aux trois valeurs de l'expression $2\cos\frac{a+2k\pi}{3}$, et dont les projections sur la circonférence de base sont les extrémités de quatre arcs respectivement égaux à $2\pi - a$, et aux trois valeurs cherchées de l'expression $\frac{a+2k\pi}{3}$.

Telle est, je pense, l'interprétation que l'on doit donner du passage de Descartes, rapporté plus haut. La méthode employée permet aussi de construire les racines des équations du troisième et du quatrième degré.

Vérification. — En prenant pour axe des z l'axe du cylindre, et pour axe des x le rayon passant par le point A, les sphères décrites des points B et D ont pour équations

$$(x - r\cos a)^2 + (y - r\sin a)^2 + z^2 = 4r^2,$$

$$(x + r\cos a)^2 + (y - r\sin a)^2 + (z - r\cos a)^2 = 4r^2 + r^2\cos^2 a;$$

ces équations sont simultanément vérifiées :

1° Pour

$$x = r\cos a, \quad y = -r\sin a, \quad z = 2r\cos a;$$

2° Pour

$$x = r\cos\frac{a+2k\pi}{3}, \quad y = r\sin\frac{a+2k\pi}{3}, \quad z = 2r\cos\frac{a+2k\pi}{3}.$$

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. LAGUERRE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Ch. Brisse.)

En désignant, en un point d'une ellipse, par ρ le rayon de courbure de cette ellipse, et par $\frac{d\rho}{ds}$ la dérivée de ce rayon par rapport à l'arc, Maclaurin a montré comment la valeur de cette dérivée pouvait se déduire de l'angle que fait la normale à l'ellipse au point considéré avec le diamètre qui passe en ce point. On peut, si l'on veut, énoncer de la façon suivante le théorème de Maclaurin :

En un point M *d'une ellipse, portons sur la tangente une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$ *et sur la normale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *la résultante de ces deux longueurs, composées comme des forces, est perpendiculaire au diamètre* OM.

Les lignes géodésiques des surfaces du second ordre jouissent d'une propriété semblable :

Si, en un point M *d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, nous portons sur la tangente* MT *à cette courbe une longueur égale à* $\frac{1}{\rho}$, *sur la normale principale une longueur égale à* $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$, *et sur la normale au plan osculateur une longueur égale à* $\frac{1}{r}$ (*r* désignant le rayon de torsion au point con-

sidéré), *la résultante de ces trois longueurs composées comme des forces est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la direction* MT.

J'ai considéré ici, pour simplifier l'énoncé, les composantes $\frac{1}{\rho}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{r}$; mais il est plus convenable, dans d'autres applications, de considérer les composantes proportionnelles $\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$, $-\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}\frac{1}{\rho^{\frac{2}{3}}}$ et $\frac{\sqrt[3]{\rho}}{r}$, ces composantes conservant d'ailleurs les directions que j'ai indiquées.

Pour abréger, appelons, si vous voulez, pour un instant, *axe de courbure* au point M la composante ainsi définie; on pourra énoncer la proposition suivante :

Si MT *et* M′T′ *désignent deux droites quelconques touchant une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre aux points* M *et* M′, *la projection de l'axe de courbure en* M *sur la tangente en* M′ *est égale à la projection de l'axe de courbure en* M′ *sur la tangente en* M.

Si MT et M′T′ étaient tangentes à deux lignes géodésiques différentes, tracées sur une même surface du second ordre, le rapport des deux projections dont je viens de parler demeurerait constant lorsque les droites se déplaceraient tangentiellement aux lignes géodésiques; à quoi j'ajouterai que les projections sont encore égales si les deux lignes géodésiques sont tangentes à une même ligne de courbure.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI;

Par M. WORONTZOFF, à Minsk.

I.

Si l'on représente par C_k^n le nombre des combinaisons de n objets k à k et par B_k le coefficient de $\frac{x^k}{1.2.3\ldots k}$ dans le développement de la fonction $\frac{x}{e^x-1}$, suivant les puissances croissantes de x, c'est-à-dire

$$\left(\frac{d^k \frac{x}{e^x-1}}{dx^k}\right)_{x=0},$$

on a, d'après des formules bien connues,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n\big[(\Delta^k B_x)_{x=0}\,\Delta^{n-k} f(x+k)\\ &\qquad\qquad -(-1)^{n-k} B_k f(x+k)\big]=0,\end{aligned}\right.$$

Δx étant égal à l'unité.

Mais, en ayant égard à la relation

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k = \left(\frac{d^n x}{dx^n}\right)_{x=0},$$

on trouve

$$(\Delta^k B_x)_{x=0} = B_k + (-1)^k k.$$

Donc, en remplaçant $(\Delta^k B_x)_{x=0}$ par sa valeur, dans la formule (1), on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(-1)^n n f(x+1)\\ &\quad+\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k\big[\Delta^{n-k} f(x+k)-(-1)^{n-k} f(x+k)\big]=0,\end{aligned}\right.$$

formule qui se transforme aisément en

$$(3)\qquad n\,\Delta f(x)+\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k\,\Delta^k[f(x)-f(x+n-k)]=0,$$

ou

$$(4)\qquad n\,\Delta^{n-1} f(x)+\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k[\Delta^{n-k}f(x)-f(x+n-k)]=0,$$

ou

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &nf(x)-\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k\,\Delta^k[f(x)+f(x+1)+\ldots\\ &\qquad\qquad +f(x+n-1-k)]=0.\end{aligned}\right.$$

Appliquons ces formules à quelques cas particuliers :

1° Soit

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)\ldots(x-n)}.$$

On déduit de la formule (3), pour n impair et $x=0$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n\, C_k^{n+k}\, B_k=0.$$

2° En appliquant la formule (2) aux fonctions

$$2^x \quad \text{et} \quad 2^x-1,$$

on a, pour n impair et $x=0$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n B_k\, 2^k=0,$$

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n\, B_k(2^{k+1}-1)=B_n,$$

ou

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^{n-1}\, B_{k+1}\,\frac{2^{k+1}-1}{k+1}=\frac{B_n}{n},$$

et aussi

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n B_k (2^{k-1} - 1) = B_n$$

pour n impair et $x = -1$.

3° Soit

$$f(x) = a^x,$$

et posons, pour abréger,

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k a^{n-k} = \varphi(a).$$

De la formule (4) on déduit, pour $x = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(a) - \varphi(a-1) &= n(a-1)^{n-1}, \\ \varphi(a-1) - \varphi(a-2) &= n(a-2)^{n-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi(1) - \varphi(0) &= n\, 0^{n-1}. \end{aligned}$$

Si l'on ajoute toutes ces égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k a^{n-k} = \sum_{a=1}^{a=a} n(a-1)^{n-1},$$

résultat bien connu.

4° Prenons

$$f(x) = \frac{B_x}{a^x}.$$

Comme

$$\left(\Delta^n \frac{B_x}{a_x}\right)_{x=0} = \frac{B_n}{a^n} + (-1)^n \left(\frac{n}{a} + a^{-n} \sum_{s=1}^{s=a-1} s^{n-1}\right);$$

la formule (4), pour $x = 0$, donne

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^{n-1} B_k a^k \sum_{s=1}^{s=a-1} s^{n-1-k} = a(1 - a^{n-2}) B_{n-1}.$$

5° Soit enfin

$$f(x) = \sin\theta x.$$

Au moyen de la formule (5), on trouve, pour $x = 0$,

$$\sum_{k=0}^{k=E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (\sqrt{-1})^{2k} C_{2k}^{n} B_{2k}\, 2^{2k} \sin^{2k}\theta \sin(n-2k)\theta$$

$$= n \sin\theta \cos(n-1)\theta,$$

$E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ désignant le plus grand entier contenu dans $\frac{n-1}{2}$.

II.

Désignons par $[s-h, s-2h, \ldots, s-(m-1)h]_k$ la somme des produits des nombres $s-h$, $s-2h, \ldots$, $s-(m-1)h$ combinés k à k et posons, pour abréger,

$$\frac{hx}{e^{hx}-1} = u, \quad \frac{B_n}{n} = \mathfrak{B}_n.$$

Comme

$$\left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n}\right)_{x=0} = \frac{1}{m-1} \left\{ n[s-(m-1)h] \frac{d^{n-1} e^{sx} u^{m-1}}{dx^{n-1}} - (n-m+1) \frac{d^n e^{sx} u^{m-1}}{dx^n} \right\}_{x=0},$$

on obtient

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n}\right)_{x=0} &= (-1)^{m-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \\ &\times \left\{ \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{(-1)^k}{n-k} [s-h, s-2h, \ldots, s-(m-1)h]_k \frac{d^{n-k} e^{sx} u}{dx^{n-k}} \right\}_{x=0} \end{aligned} \right.$$

et, pour $s = 0$,

$$\left(\frac{d^n u^m}{dx^n}\right)_{x=0} = (-1)^{m-1} h^n \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \times \left[\sum_{k=0}^{k=m-1} (1, 2, 3, \ldots, m-1)_k \frac{B_{n-k}}{n-k}\right],$$

ou, sous la forme symbolique,

$$\left(\frac{d^n u^m}{dx^n}\right)_{x=0} = (-1)^{m-1} h^n \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \times \mathfrak{B}^{n-m+1}(\mathfrak{B}+1)(\mathfrak{B}+2)\ldots(\mathfrak{B}+m-1) \quad (*),$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^n B_k B_{n-k} = -[(n-1)B_n + nB_{n-1}],$$

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} C_k^n B_k [(n-1-k)B_{n-k} + (n-k)B_{n-1-k}] = B_n - \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{B_n}{n} + 3\frac{B_{n-1}}{n-1} + 2\frac{B_{n-2}}{n-2}\right),$$

. . . .

D'un autre côté

$$\left(\frac{d^n e^{sx} u^m}{dx^n}\right)_{x=0} = h^m \frac{d^m \Delta^{-m} s^n}{ds^m},$$

où $\Delta s = h$, et, par suite,

$$h^m \frac{d^m \Delta^{-m} f(x)}{dx^m} = f(x) + \left(\frac{du^m}{dx}\right)_{x=0} \frac{df(x)}{dx} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2 u^m}{dx^2}\right)_{x=0} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots.$$

(*) Dans le développement du second membre de cette formule, les exposants de $\mathfrak{B}$ doivent être remplacés par des indices de même valeur.

Donc on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta^{-m}f(x) &= \frac{1}{h^m}\int^{(m)} f(x)\,dx^m \\
&- \frac{1}{h^{m-1}}\,\frac{[1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_1}{m-1}\int^{(m-1)} f(x)\,dx^{m-1} \\
&+ \frac{1}{h^{m-2}}\,\frac{[1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_2}{(m-1)(m-2)}\int^{(m-2)} f(x)\,dx^{m-2} + \ldots \\
&+ \frac{(-1)^{m-1}}{h}\int f(x)\,dx + \frac{(-1)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)} \\
&\times\left(\left\{\sum_{k=0}^{k=m-1}[1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_k\,\frac{B_{m-k}}{m-k}\right\}f(x)\right. \\
&\quad + h\left\{\sum_{k=0}^{k=m-1}[1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_k\,\frac{B_{m+1-k}}{m+1-k}\right\}\frac{df(x)}{dx} \\
&\quad \left. + \frac{h^2}{1.2}\left\{\sum_{k=0}^{k=m-1}[1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_k\,\frac{B_{m+2-k}}{m+2-k}\right\}\frac{d^2f(x)}{dx^2} + \ldots\right),
\end{aligned}\right.$$

ou, sous la forme symbolique,

$$\Delta^{-m}f(x) = \sum_{k=0}(-1)^{m-1}\,\frac{h^{k-m}k(k-1)\ldots(k-m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m)}$$
$$\times\, \mathfrak{B}^{k-m+1}(\mathfrak{B}+1)\ldots(\mathfrak{B}+m-1)\,D^{k-m}f(x),$$

formule générale de l'intégration successive.

Prenons la fonction

$$f(x) = (x+1,\ x+2, \ldots,\ x+p-1)_n.$$

En remarquant que

$$\Delta^k(x+1,\ x+2, \ldots,\ x+p-1)_n$$
$$= (p-1)(p-2)\ldots(p-k)$$
$$\times (x+k+1,\ x+k+2, \ldots,\ x+p-1)_{n-k},$$

où $\Delta x = 1$, et

$$\frac{d^k(x+1, x+2, \ldots, x+p-1)_n}{dx^k}$$
$$= (p-n)(p-n+1)\ldots(p-n+k-1)$$
$$\times (x+1, x+2, \ldots, x+p-1)_{n-k},$$

on tire de la formule précédente

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^{p-n+k-1} B_k [1, 2, 3, \ldots, (p-1)]_{n-k}$$
$$= (B+1, B+2, \ldots, B+p-1)_n$$
$$= \frac{p-n}{p} [1, 2, 3, \ldots, (p-1)]_n,$$

. . . . ,

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_k^{p-n+k-1} [1, 2, 3, \ldots, (p-1)]_{n-k}$$
$$\times \sum_{s=0}^{s=m-1} [1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_s \frac{B_{m+k-s}}{m+k-s}$$
$$= \mathcal{B}(\mathcal{B}+1)(\mathcal{B}+2)\ldots(\mathcal{B}+m-1)$$
$$\times (\mathcal{B}+1, \mathcal{B}+2, \ldots, \mathcal{B}+p-1)_n$$
$$= (-1)^{m-1} \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{p(p+1)\ldots(p+m-1)}$$
$$\times [-1, -2, \ldots, -(m-1), 1, 2, 3, \ldots, (p-1)]_{n+m}$$
$$+ \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^{m+k} \frac{1.2.3\ldots(m-k-1)}{(p-n-1)(p-n-2)\ldots(p-n-m+k)}$$
$$\times [1, 2, 3, \ldots, (m-1)]_k [1, 2, 3, \ldots, (p-1)]_{n+m-k}.$$

Remarque. — L'égalité (6) peut aussi s'obtenir au moyen de la formule

$$\Delta^{p-m} f(x) = \frac{1}{h^{m-1}(p-1)\ldots(p-m+1)}$$
$$\times \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k [x-h, \ldots, x-(m-1)h]_k$$
$$\times \Delta^{p-1}[x-(m-1)h]^{m-1-k} f[x-(m-1)h],$$

qui donne, pour $p = 0$,

$$\Delta^{-m} f(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{h^{m-1}\, 1.2.3\ldots(m-1)}$$

$$\times \sum_{k=0}^{k=m-1} (-1)^k [x-h, \ldots, x-(m-1)h]_k$$

$$\times \Delta^{-1} x^{m-1-k} f(x).$$

THÉORÈMES NOUVEAUX SUR LA PARABOLE ET L'HYPERBOLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

En prenant l'équation de la parabole rapportée à des axes rectangulaires sous la forme

$$y = x^2,$$

l'aire d'un triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ est, en désignant par x_1, x_2, x_3 les abscisses des sommets, donnée par la formule

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & 1 \\ x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_3 & x_3^2 & 1 \end{vmatrix},$$

et, d'après un théorème connu,

$$P_1 P_2 P_3 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2).$$

Les coordonnées du pôle Q_1 de la corde $P_2 P_3$ sont respectivement $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$ et $x_2 x_3$, et, par suite, l'aire du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$, correspondant au triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$, est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_2 x_3 & 1 \\ x_3 + x_1 & x_3 x_1 & 1 \\ x_1 + x_2 & x_1 x_2 & 1 \end{vmatrix},$$

et l'on trouve aisément, en retranchant les deux dernières lignes de la première,

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -\tfrac{1}{2} P_1 P_2 P_3.$$

On conclut de ce résultat le théorème suivant :

Théorème I. — *L'aire du triangle formé par trois tangentes à la parabole est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle formé par les trois points de contact.*

Désignons par R_1 le point de contact de la tangente parallèle à $P_2 P_3$: l'abscisse x' de ce point est égale à $\frac{1}{2}(x_2 + x_3)$, et, en remplaçant x_i par x'_i dans l'expression de $P_1 P_2 P_3$, on en conclut la valeur de $R_1 R_2 R_3$, et par suite le théorème suivant :

Théorème II. — *L'aire du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

Si, par le point P_1, on mène une parallèle à $P_2 P_3$, cette droite rencontre la parabole en un point S_1 dont l'abscisse x''_1 est égale à $x_2 + x_3 - x_1$, et en remplaçant, dans l'expression de $P_1 P_2 P_3$, x_i par x''_i, on en conclut l'aire de $S_1 S_2 S_3$, et par suite le théorème suivant :

Théorème III. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, ces droites rencontrent la parabole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.*

Les coordonnées du pôle de $P_1 S_1$ sont respectivement

$$x = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y = x_1(x_2 + x_3 - x_1).$$

et l'aire du triangle formé par les trois pôles a pour expression

$$\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_2 + x_3 & x_1(x_2 + x_3 - x_1) & 1 \\ x_3 + x_1 & x_2(x_3 + x_1 - x_2) & 1 \\ x_1 + x_2 & x_3(x_1 + x_2 - x_3) & 1 \end{vmatrix},$$

et, en retranchant les deux dernières lignes de la première, on obtient :

THÉORÈME IV. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit à la parabole, on mène des parallèles aux côtés opposés, les pôles de ces droites forment un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.*

En désignant par T_1 et U_1 les points de contact des tangentes parallèles à $P_1 R_1$ et $R_1 S_1$, les triangles $T_1 T_2 T_3$, $U_1 U_2 U_3$, les triangles formés par les pôles de $P_1 R_1$, $P_1 T_1$, $P_1 U_1$, $R_1 S_1$,... et par les pôles analogues, ainsi que les triangles formés par les points de contact des tangentes parallèles à ces diverses droites et aux droites analogues, donnent lieu à un grand nombre de théorèmes semblables à ceux que nous avons indiqués, et dont les démonstrations fournissent ainsi des exercices curieux et variés sur la théorie des déterminants.

Considérons maintenant deux triangles $A_1 A_2 A_3$ et $P_1 P_2 P_3$ inscrits à la parabole, et désignons par a_1, a_2, a_3 et x_1, x_2, x_3 les abscisses de ces points. Menons par le point A_1 une parallèle à $P_2 P_3$, et désignons par B_1 son point d'intersection avec la parabole; l'abscisse de ce point est égale à $x_2 + x_3 - a_1$, et l'aire du triangle $B_1 B_2 B_3$ a pour expression

$$\tfrac{1}{2}(a_2 + x_2 - a_3 - x_3)(a_3 + x_3 - a_1 - x_1)(a_1 + x_1 - a_2 - x_2).$$

Menons maintenant par le point P_1 une parallèle à $A_2 A_3$, et désignons par C_1 son point d'intersection avec la para-

bole; l'abscisse de ce point est égale à $a_2 + a_3 - x_1$, et l'aire du triangle $C_1 C_2 C_3$ est égale à celle de $B_1 B_2 B_3$.

Désignons enfin par D_1 le point de contact de la tangente parallèle à $A_1 P_1$; l'abscisse de ce point est égale à $\frac{1}{2}(a_1 + x_1)$, et, par suite, l'aire du triangle $D_1 D_2 D_3$ est égale au huitième, pris en signe contraire, de l'aire du triangle $B_1 B_2 B_3$; de là le théorème suivant :

Théorème V. — *Si deux triangles sont inscrits à la parabole, et si par les sommets de chacun d'eux on mène des parallèles aux côtés correspondants du second, ces parallèles rencontrent la parabole en six points formant deux triangles dont l'aire est la même et égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent les sommets correspondants des deux triangles donnés.*

Ce théorème comprend un très-grand nombre de cas particuliers, lorsqu'un ou plusieurs des sommets de ces triangles coïncident; si A_1, A_2, A_3 coïncident, on a ainsi le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si, par un point de la parabole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, et si par les sommets de ce triangle on mène des parallèles à la tangente au point donné, ces parallèles rencontrent la parabole en six nouveaux points formant deux triangles équivalents dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle formé par les points de contact des tangentes parallèles aux droites qui joignent le point donné aux sommets du triangle donné.*

Le théorème précédent s'applique d'ailleurs facilement à un polygone concave ou convexe, d'un nombre

quelconque de côtés, et les aires des polygones formés sont en raison constante avec le polygone donné.

On peut trouver encore des théorèmes analogues sur les pôles des droites considérées dans les deux théorèmes précédents.

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit $P_1 P_2 P_3 P_4$; nous avons, par définition (*),

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = P_1 P_2 P_3 + P_1 P_3 P_4,$$

et, en nous reportant à l'aire du triangle inscrit à la parabole,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 = -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_1 + x_3 - x_2 - x_4);$$

si nous remplaçons dans cette formule x_i par $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à $P_i P_{i+1}$, et si nous remarquons que le dernier facteur s'annule, nous obtenons le théorème suivant, qui contient un certain nombre de corollaires pour le trapèze et pour le triangle :

Théorème VII. — *Le quadrilatère formé par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit à la parabole a une aire nulle.*

En calculant encore l'aire du quadrilatère formé par les pôles des côtés consécutifs du quadrilatère inscrit, on obtient la moitié, prise en signe contraire, de l'aire de ce quadrilatère, et, en appliquant ce résultat au théorème précédent, que nous allons généraliser :

Théorème VIII. — *Le quadrilatère formé par les tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit a une aire nulle.*

(*) *Voir* mon Mémoire ayant pour titre : *Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure* (Extrait du *Bulletin de la Société d'émulation de l'Allier*. Moulins, 1875).

Considérons enfin un polygone de n côtés ABC...HKL, inscrit à la parabole; désignons par a, b, c,..., h, k, l les pôles de AB, BC,..., KL, LA, et admettons la formule

$$abc\ldots hkl = -\tfrac{1}{2}\,\text{ABC}\ldots\text{HKL}.$$

Ajoutons un sommet M au polygone inscrit, et désignons par l' et m les pôles de LM et MA; le triangle ALM nous donne

$$ll'm = -\tfrac{1}{2}\,\text{ALM}.$$

L'addition des seconds membres des deux égalités précédentes donne $-\frac{1}{2}$ ABC...HKLM, et celle des deux premiers nous donne l'aire du polygone $abc\ldots hkl'm$, si l'on remarque, en effet, que les trois points k, l, l' sont en ligne droite, ainsi que les points a, l, m, comme pôles de droites concourantes. De là, la proposition suivante :

Théorème IX. — *L'aire du polygone formé par n tangentes à la parabole est égale à la moitié de l'aire, prise en signe contraire, du polygone qui réunit les points de contact.*

Ce théorème comprend un grand nombre de cas particuliers, en supposant un ou plusieurs côtés du polygone infiniment petits. En supposant que le polygone inscrit se compose d'un arc de parabole et de sa corde, on retrouve ainsi l'aire du segment.

Nous ajouterons, sans démonstration, les deux théorèmes suivants, susceptibles de généralisation, ainsi que les précédents :

Théorème X. — *Si l'on joint les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole, et si l'on prend les milieux des cordes interceptées dans la courbe, l'aire formée par ces trois points est égale à la moitié, prise en signe contaire, de celle du triangle inscrit.*

Théorème XI. — *L'aire du triangle formé par les pôles des droites qui joignent les milieux des côtés d'un triangle inscrit à la parabole est égale au quart de celle du triangle inscrit.*

Nous prendrons l'équation de l'hyperbole sous la forme

$$xy = 1,$$

et nous supposerons les axes rectangulaires; mais les formules suivantes s'appliquent à une hyperbole quelconque, en multipliant chaque aire par le sinus de l'angle des asymptotes.

L'aire d'un triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ a pour expression

$$P_1 P_2 P_3 = \frac{1}{2} \frac{x_2 - x_3}{x_1} \frac{x_3 - x_1}{x_2} \frac{x_1 - x_2}{x_3}.$$

Les coordonnées du pôle Q_3 de la corde $P_1 P_2$ sont données par les formules

$$x = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2}, \quad y = \frac{2}{x_1 + x_2},$$

et l'aire du triangle $Q_1 Q_2 Q_3$ correspondant au triangle $P_1 P_2 P_3$ est donnée par l'expression

$$Q_1 Q_2 Q_3 = -2 \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3} \frac{x_3 - x_1}{x_3 + x_1} \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}.$$

Si le centre de gravité du triangle inscrit est situé sur l'une des asymptotes, on a, par exemple, pour l'axe des y,

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

et la comparaison des deux résultats obtenus ci-dessus nous donne immédiatement le théorème suivant :

Théorème XII. — *Si sur une hyperbole on prend trois points formant un triangle dont le centre de gravité est situé sur l'une des asymptotes, l'aire du triangle des*

tangentes menées par ces trois points est égale à quatre fois l'aire du triangle inscrit.

Si le centre de gravité est situé sur la courbe, on a la relation

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 9,$$

ou, par une transformation facile,

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1}\,\frac{x_3 + x_1}{x_2}\,\frac{x_1 + x_2}{x_3} = 8,$$

et la comparaison des deux résultats precédents nous donne encore :

THÉORÈME XIII. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, l'aire du triangle des tangentes aux sommets est égale, en signe contraire, à la moitié de l'aire du triangle inscrit.*

Si nous exprimons que la corde PP_1 est parallèle à la corde $P_2 P_3$, nous obtenons la condition $xx_1 = x_2 x_3$, et, pour le point de contact de la tangente PP parallèle à $P_2 P_3$, nous avons $x = \pm\sqrt{x_2 x_3}$, et ainsi il y a toujours deux solutions réelles si x_2 et x_3 sont de même signe, c'est-à-dire si P_2 et P_3 appartiennent à la même branche d'hyperbole.

Si, dans l'expression de $P_1 P_2 P_3$, nous remplaçons x_1, x_2, x_3 respectivement par $\frac{x_2 x_3}{x_1}$, $\frac{x_3 x_1}{x_2}$, $\frac{x_1 x_2}{x_3}$, nous obtenons

$$- P_1 P_2 P_3 \,\frac{x_2 + x_3}{x_1}\,\frac{x_3 + x_1}{x_2}\,\frac{x_1 - x_2}{x_3},$$

et, par suite, les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME XIV. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur la courbe, et*

si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à huit fois l'aire, prise en signe contraire, du triangle inscrit.

THÉORÈME XV. — *Si le centre de gravité d'un triangle inscrit à l'hyperbole est situé sur l'une des asymptotes, et si l'on mène par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés, ces parallèles rencontrent la courbe en trois nouveaux points, formant un triangle dont l'aire est égale à celle du triangle inscrit.*

Considérons maintenant un quadrilatère inscrit $P_1 P_2 P_3 P_4$; l'aire de ce quadrilatère a pour expression, en opérant comme dans le cas de la parabole,

$$\tfrac{1}{2}(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)\left(\frac{1}{x_1 x_3} - \frac{1}{x_2 x_4}\right).$$

Si nous remplaçons dans cette formule x_i par $+\sqrt{x_i x_{i+1}}$, qui représente l'abscisse du point de contact de la tangente parallèle à $P_i P_{i+1}$, en supposant tous les points situés sur la même branche d'hyperbole, et si nous remarquons que le dernier facteur du résultat précédent s'annule, nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME XVI. — *Le quadrilatère formé dans une même branche d'hyperbole par les points de contact des tangentes parallèles aux côtés d'un quadrilatère inscrit dans cette branche a une aire nulle.*

Ce théorème, que nous avons déjà rencontré dans la parabole, est également vrai pour le cercle et, par suite, pour l'ellipse, en prenant tous les points de contact sur la même demi-circonférence, ainsi qu'on le démontre immédiatement pour le cercle en faisant voir que les deux triangles dont se compose le quadrilatère sont égaux.

Les théorèmes sur l'hyperbole paraissent moins nombreux que les théorèmes correspondants sur la parabole, à cause de la condition imposée au centre de gravité du triangle; mais, puisque l'une et l'autre des deux conditions sont homogènes et symétriques, on peut remplacer x_i par Kx_i, quelle que soit la valeur de K, et en particulier $K = 2$. On peut aussi augmenter le nombre des résultats précédents à l'aide des remarques suivantes.

Si, par un point $x = a$ de l'hyperbole, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points ayant pour abscisses $\frac{x_2 x_3}{a}$, $\frac{x_3 x_1}{a}$, $\frac{x_1 x_2}{a}$, et, si l'on porte ces valeurs dans les expressions de $P_1 P_2 P_3$ et de $Q_1 Q_2 Q_3$, on retrouve les aires des triangles avec des signes contraires. En portant ces valeurs dans la condition qui exprime que le centre de gravité du triangle $P_1 P_2 P_3$ est situé sur la courbe, on retrouve cette même condition. Enfin il est facile de voir que, si le centre de gravité du triangle inscrit $P_1 P_2 P_3$ est situé sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du nouveau sera situé sur l'autre. Donc :

Théorème XVII. — *Si, par un point d'une hyperbole, on mène des parallèles aux côtés d'un triangle inscrit, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale, en signe contraire, à l'aire du premier; il en est de même des triangles circonscrits correspondants. Enfin, si le centre de gravité du premier triangle inscrit est situé sur la courbe ou sur l'une des asymptotes, le centre de gravité du second sera situé sur la courbe ou sur l'autre asymptote.*

Les deux premières parties de ce théorème s'appliquent également à un polygone quelconque.

Nous énoncerons encore les propositions suivantes, dont nous laissons au lecteur la vérification :

Théorème XVIII. — *L'aire du triangle obtenu en prenant les milieux des cordes interceptées dans une hyperbole passant par le centre du triangle inscrit, par les droites qui joignent les milieux des côtés de ce triangle, est égale à la moitié, prise en signe contraire, de l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XIX. — *Si, par les sommets d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant par le centre du triangle, on mène des parallèles à la tangente passant au centre du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois nouveaux points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XX. — *Si, par le centre d'un triangle inscrit dans une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle, ces parallèles rencontrent l'hyperbole en trois points formant un triangle dont l'aire est égale à moins vingt-sept fois l'aire du triangle inscrit.*

Théorème XXI. — *Par le centre d'un triangle inscrit à une hyperbole passant en ce point, on mène des parallèles aux côtés du triangle inscrit, et, par les points d'intersection de ces parallèles avec l'hyperbole, on mène des tangentes à la courbe, l'aire du triangle formé par ces tangentes est égale, en signe contraire, à l'aire du triangle inscrit.*

Nous ferons remarquer que la plupart de ces théorèmes sont susceptibles d'une grande généralisation, et s'appliquent indistinctement à toutes les coniques, mais

en tenant compte de la restriction indiquée au théorème XVI pour le cas du cercle ; nous citerons notamment à ce sujet les théorèmes V et VI. On peut d'ailleurs arriver plus rapidement à ces résultats et déduire les théorèmes de l'hyperbole de ceux qui concernent la parabole, et réciproquement. Nous donnerons enfin, dans un prochain travail, les théorèmes correspondants dans la Géométrie à trois dimensions.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1070

(voir 2e série, t. XIII, p. 143).

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Calais.

L'équation $\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + au^2 + bu^4}$ *définit une fonction* u, *si l'on donne la condition* $u = 0$ *pour* $x = 0$.

C'est une fonction impaire de x, *et, dans son développement suivant les puissances de* x, *le coefficient de* $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$ *est de la forme*

$$a^n + \lambda_1 a^{n-2} b + \lambda_2 a^{n-4} b^2 + \lambda_3 a^{n-6} b^3 + \ldots.$$

On a

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3}{2} n,$$

$$\lambda_2 = \frac{5^{2n+1} - 5}{256} + \frac{3^{2n+3} - 3^3}{64} + \frac{9}{8} n^2 - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16}\right) n$$

Tous ces nombres λ_1, λ_2, λ_3, ... *sont entiers. Démontrer les résultats précédents.* (F. DIDON.)

De l'équation donnée on tire $\frac{d^2 u}{dx^2} = au + 2bu^3$, et l'on reconnaît facilement, par différentiations successives, que les coefficients du développement

$$u = x + a\frac{x^3}{1.2.3} + (a^2 + 12b)\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

ont la forme annoncée, et que tous les nombres λ_1, λ_2, $\lambda_3, \ldots$ sont entiers. Pour chercher à déterminer ces nombres, posons

$$u = u_0 + u_1 b + u_2 b^2 + u_3 b^3 + \ldots;$$

l'équation $\frac{d^2 u}{dx^2} = au + 2bu^3$ nous donnera

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2 u_0}{dx^2} - au_0\right) &+ \left(\frac{d^2 u_1}{dx^2} - au_1\right) b \\ &+ \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} - au_2\right) b^2 + \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} - au_3\right) b^3 + \ldots \\ &= 2b\,(u_0 + u_1 b + u_2 b^2 + \ldots)^3 \\ &= 2u_0^3 b + 6u_0^2 u_1 b^2 + 6\,(u_0^2 u_2 + u_0 u_1^2)\,b^3 + \ldots,\end{aligned}$$

et il en résulte les relations suivantes :

(1) $$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = au_0,$$

(2) $$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = au_1 + 2u_0^3,$$

(3) $$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = au_2 + 6u_0^2 u_1.$$

(4) $$\frac{d^2 u_3}{dx^2} = au_3 + 6\,(u_0^2 u_2 + u_0 u_1^2).$$

On pourrait intégrer ces équations, et, connaissant les différentes fonctions $u_0, u_1, \ldots$, la question serait résolue; mais on peut procéder de la manière suivante, en déterminant seulement, dans chacune de ces fonctions,

le coefficient de $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$, que nous appellerons dans tous les cas P_n.

1° L'équation (1) donne

$$\frac{d^{2n+1}u_0}{dx^{2n+1}} = a\,\frac{d^{2n-1}u_0}{dx^{2n-1}};$$

donc

$$P_n = aP_{n-1},$$

et, comme $P_0 = 1$, il s'ensuit

$$P^n = a^n.$$

2° On tire de même de l'équation (2) la relation

$$P_n = aP_{n-1} + 2\left[\frac{d^{2n-1}(u_0^3)}{dx^{2n-1}}\right]_{x=0}.$$

Or, à cause des équations

$$\left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 = 1 + au_0^2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2u_0}{dx^2} = au_0,$$

on peut poser

$$(5) \qquad \frac{d^{2n-1}(u_0^3)}{dx^{2n-1}} = A_{n-1}\frac{du_0}{dx} + B_{n-1}u_0^2\frac{du_0}{dx};$$

et, en différentiant deux fois de suite, il vient

$$\frac{d^{2n+1}(u_0^3)}{dx^{2n+1}} = (aA_{n-1} + 2B_{n-1})\frac{du_0}{dx} + 9aB_{n-1}u_0^2\frac{du_0}{dx},$$

donc

$$A_n = aA_{n-1} + 2B_{n-1} \quad \text{et} \quad B_n = 9aB_{n-1}.$$

De plus

$$\frac{d(u_0^3)}{dx} = 3u_0^2\frac{du_0}{dx}$$

montre que

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad B_0 = 3,$$

et, comme

$$\left[\frac{d^{2n-1}(u_0^2)}{dx^{2n-1}}\right]_{x=0} = A_n$$

on a

$$P_n = aP_{n-1} + 2A_{n-1} \quad \text{avec} \quad P_0 = 0$$

Si nous appelons respectivement $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ les fonctions génératrices de P_n, A_n et B_n, les relations précédentes donnent les équations

$$\begin{aligned}(1-at)\varphi(t) &= 2t\varphi_1(t),\\ (1-at)\varphi_1(t) &= 2t\varphi_2(t),\\ (1-9at)\varphi_2(t) &= 3,\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(t) = \frac{12t^2}{(1-at)^2(1-9at)} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\frac{3}{16}}{1-9at} - \frac{\frac{3}{2}}{(1-at)^2} + \frac{\frac{21}{16}}{1-at}\right],$$

et le coefficient de t^n dans le développement de cette fonction sera

$$\begin{aligned}P_n &= a^{n-2}\left[\frac{3}{16}9^n - \frac{3}{2}(n+1) + \frac{21}{16}\right]\\ &= a^{n-2}\left(\frac{3^{2n+1}-3}{16} - \frac{3}{2}n\right) = \lambda_1 a^{n-2}.\end{aligned}$$

3° L'équation (2) équivaut à la suivante :

$$\frac{d^2u_0}{dx^2}\frac{du_1}{dx} + \frac{du_0}{dx}\frac{d^2u_1}{dx^2} = a\left(u_0\frac{du_1}{dx} + u_1\frac{du_0}{dx}\right) + 2u_0^3\frac{du_0}{dx},$$

qui donne, par intégration directe,

$$\frac{du_0}{dx}\frac{du_1}{dx} = au_0u_1 + \frac{u_0^4}{2};$$

on tire de là

$$2au_0u_1\frac{du_0}{dx} = -u_0^4\frac{du_0}{dx} + 2\frac{du_1}{dx} + 2au_0^2\frac{du_1}{dx},$$

qui servira à la réduction des dérivées successives de la fonction $u_0^2 u_1$.

Ici l'on peut poser

$$\frac{d^{2n-1}(u_0^2 u_1)}{dx^{2n-1}} = \mathrm{A}_{n-1}\frac{du_0}{dx} + \mathrm{B}_{n-1} u_0^2 \frac{du_0}{dx} + \mathrm{C}_{n-1} u_0^4 \frac{du_0}{dx} + \mathrm{D}_{n-1}\frac{du_1}{dx} + \mathrm{E}_{n-1} u_0^2 \frac{du_1}{dx},$$

et, en différentiant deux fois de suite, on trouve les relations

$$\mathrm{A}_n = a\mathrm{A}_{n-1} + 2\mathrm{B}_{n-1}, \quad \mathrm{B}_n = 9a\mathrm{B}_{n-1} + 12\mathrm{C}_{n-1} + 6\mathrm{D}_{n-1},$$
$$\mathrm{C}_n = 25a\mathrm{C}_{n-1} + 12\mathrm{E}_{n-1}, \quad \mathrm{D}_n = a\mathrm{D}_{n-1} + 6\mathrm{E}_{n-1},$$
$$\mathrm{E}_n = 9a\mathrm{E}_{n-1};$$

on a d'ailleurs

$$\mathrm{P}_n = a\mathrm{P}_{n-1} + 6\mathrm{A}_{n-1} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}_0 = 0;$$

et, en prenant la première dérivée de $u_0^2 u_1$, on obtient les valeurs initiales

$$\mathrm{A}_0 = 0, \quad \mathrm{B}_0 = 0, \quad \mathrm{C}_0 = -\frac{1}{a}, \quad \mathrm{D}_0 = \frac{2}{a}, \quad \mathrm{E}_0 = 3.$$

Si maintenant on désigne respectivement par $\varphi(t)$, $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_5(t)$ les fonctions génératrices des quantités P_n, A_n, $\mathrm{B}_n, \ldots$, E_n, on arrive aux équations suivantes :

$$(1 - at)\varphi(t) = 6t\varphi_1(t),$$
$$(1 - at)\varphi_1(t) = 2t\varphi_2(t),$$
$$(1 - 9at)\varphi_2(t) = 12t\varphi_3(t) + 6t\varphi_4(t),$$
$$(1 - 25at)\varphi_3(t) = 12t\varphi_5(t) - \frac{1}{a},$$
$$(1 - at)\varphi_4(t) = 6t\varphi_5(t) + \frac{2}{a},$$
$$(1 - 9at)\varphi_5(t) = 3,$$

et, en les résolvant, on trouve enfin

$$\varphi(t) = \frac{432t^4(7-15at)}{(1-at)^3(1-9at)^2(1-25at)}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[\frac{\frac{5}{256}}{1-25at} + \frac{\frac{45}{64}}{1-9at} - \frac{\frac{9}{32}}{(1-9at)^2} + \frac{\frac{799}{256}}{1-at} - \frac{\frac{93}{16}}{(1-at)^2} + \frac{\frac{9}{4}}{(1-at)^3}\right];$$

donc

$$P_n = a^{n-4}\left[\frac{5}{256}25^n + \frac{45}{64}9^n - \frac{9}{32}(n+1)9^n + \frac{799}{256} - \frac{93}{16}(n+1) + \frac{9}{4}\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]$$

$$= a^{n-4}\left[\frac{5^{2n+1}-5}{256} + \frac{3^{2n+3}-3^3}{64} + \frac{9}{8}n^2 - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16}\right)n\right] = \lambda_2 a^{n-4}.$$

4° En appliquant la même méthode à l'équation (4), on arrive à la formule

$$\varphi(t) = \frac{5184t^6(847-15533at+44845a^2t^2-39375a^3t^3)}{(1-at)^4(1-9at)^3(1-25at)^2(1-49at)},$$

ou, en décomposant en fractions simples,

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^6}\left[\frac{\frac{7}{4096}}{1-49t} + \frac{\frac{125}{1024}}{1-25at} - \frac{\frac{15}{512}}{(1-25at)^2} + \frac{\frac{5121}{2048}}{1-9at} - \frac{\frac{909}{512}}{(1-9at)^2} + \frac{\frac{27}{64}}{(1-9at)^3} + \frac{\frac{36291}{4096}}{1-at} - \frac{\frac{2175}{128}}{(1-at)^2} + \frac{\frac{927}{64}}{(1-at)^3} - \frac{\frac{27}{8}}{(1-at)^4}\right],$$

et l'on tire de là

$$P_n = \lambda_3 a^{n-6} = a^{n-6}\left[\frac{7^{2n+1}-7}{4096} + 19\frac{5^{2n+1}-5}{1024} + 29\frac{3^{2n+4}-3^4}{2048} - \frac{9}{16}n^3 + \left(\frac{3^{2n+3}}{128} + \frac{495}{128}\right)n^2 - \left(3\,\frac{5^{2n+1}}{512} + 65\,\frac{3^{2n+2}}{512} + \frac{363}{64}\right)n\right].$$

Question 1152

(voir 2e série, t. XIII, p. 400),

PAR M. MORET-BLANC.

Deux surfaces gauches S_1 *et* S_2 *ont une génératrice commune* A. *Déterminer leurs points de contact sur* A.

S_1 *restant fixe, on donne à* S_2 *un double mouvement de translation parallèlement à* A *et de rotation autour de cette droite : quelle sera la position des points de contact au bout d'un temps donné* t?

(ED. DEWULF.)

1° Je prends la droite A pour axe des z, les coordonnées étant rectangulaires.

Les équations des plans tangents aux surfaces S_1 et S_2 en un point de la droite A seront

$$y = \alpha x,$$
$$y = \alpha_1 x,$$

α et α_1 étant des fonctions déterminées de l'ordonnée z du point du contact.

Soient

$$\alpha = \varphi(z),$$
$$\alpha_1 = \psi(z).$$

Pour les points de contact des deux surfaces situées sur

A, on aura

$$\varphi(z) - \psi(z) = 0,$$

équation qui fera connaître ces points.

2° Je suppose, pour fixer les idées, que les deux mouvements de translation et de rotation imprimés à la surface S_2 soient des mouvements uniformes dont les vitesses sont v et ω.

Soient z l'ordonnée d'un point de contact des surfaces au bout du temps t. Ce point, considéré comme appartenant à S_2, avait, à l'origine du mouvement, pour ordonnée $z - vt$, et la trace du plan tangent en ce point sur le plan xy faisait avec la trace du plan tangent commun au bout du temps t l'angle ωt. On a donc

$$\operatorname{tang} \omega t = \frac{\varphi(z) - \psi(z - vt)}{1 + \varphi(z)\psi(z - vt)}.$$

Telle est l'équation qui fera connaître les ordonnées des points de contact au bout du temps t.

Si les mouvements n'étaient pas uniformes, il faudrait, dans l'équation précédente, remplacer vt et ωt par les expressions de la translation et de la rotation en fonction du temps.

Question 1153

(voir 2e série, t. XIII, p. 448),

Par M. MORET-BLANC.

Un point pesant est placé au pôle d'une spirale logarithmique sans masse ayant avec une droite horizontale assez d'adhérence pour y rouler sans glissement sous l'action du poids de son pôle. On demande d'étudier : la loi du mouvement de la spirale en le décomposant en translation avec le pôle et rotation autour de ce pôle ; l'enveloppe des diverses spires de la spirale, de sa dé-

veloppée, de la développée de cette développée et généralement de la développée d'ordre n ; la loi de succession avec le temps de leurs points de contact avec leurs enveloppes, le lieu des centres de courbure de chacune d'elles correspondant à tout instant sur ces développées successives au point d'appui de la spirale roulante et leur loi de succession avec le temps.

(Haton de la Goupillière.)

Soient O la position initiale du pôle, M le point initial de contact, MH l'horizontale sur laquelle roule la spirale, OH perpendiculaire à OM et rencontrant l'horizontale au point H, μ l'angle de la spirale, dont l'équation polaire est

$$r = ae^{m\theta},$$

OH étant l'axe polaire.

Mouvement de translation. — La normale à la trajectoire du pôle passant constamment par le point de contact et faisant avec l'horizontale un angle constant μ, cette trajectoire est une droite perpendiculaire à OM : c'est OH. Le mouvement du pôle est donc celui d'un point pesant sur un plan incliné : *c'est un mouvement uniformément accéléré, dont l'accélération est* $g \cos\mu$, *la vitesse est* $v = gt \cos\mu$, *et le chemin parcouru est* $x = \frac{1}{2} gt^2 \cos\mu$.

Mouvement de rotation autour du pôle. — Soient M' le point de la spirale qui, au bout du temps t, sera le point de contact de la spirale avec MH, r et θ ses coordonnées, r_0 et θ_0 celles du point M. Au bout du temps t, la spirale aura tourné de l'angle $\omega = \text{MOM}' = \theta_0 - \theta$; mais on a

$$r_0 = ae^{m\theta_0}, \quad r = ae^{m\theta},$$

d'où l'on tire

$$\omega = \theta_0 - \theta = \frac{1}{m} l. \frac{r_0}{r}.$$

Mais, O′ étant la position du pôle au bout du temps t,

$$r = O'M' = r_0 - OO' \cot\mu = r_0 - mx;$$

donc

$$\omega = \frac{1}{m}\, l.\frac{r_0}{r_0 - mx} = \frac{1}{m}\, l.\frac{r_0}{r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos\mu}.$$

La vitesse de rotation au bout du temps t est

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{gt\cos\mu}{r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos\mu},$$

et l'accélération de rotation

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g\cos\mu\,(r_0 + \frac{1}{2} gt^2 \cos\mu)}{(r_0 - \frac{1}{2} mgt^2 \cos\mu)^2}.$$

Enveloppes des spires de la spirale, de sa développée, etc. — On sait que, lorsqu'une courbe roule sur une autre, la normale commune à l'enveloppe et à l'enveloppée passe par le point de contact correspondant de la courbe roulante et de la courbe fixe.

Je rappellerai, en outre, cette propriété de la spirale logarithmique : si OM et ON sont deux rayons de la spirale, et que, sur un troisième rayon OM′ comme homologue de OM, on construise le triangle OM′N′ semblable au triangle OMN, le point N′ appartiendra à la spirale.

Cela posé, sur OM je construis un segment capable de l'angle $90° + \mu$; il appartient à la circonférence décrite sur le diamètre MH et rencontre la spirale en des points N, P, Q,.... Les tangentes en ces points faisant l'angle μ avec les rayons vecteurs sont perpendiculaires aux droites MN, MP, MQ,..., et passent par conséquent par le point fixe H. *Les points* M, N, P, Q,... *sont donc les points de contact des spires avec leurs enveloppes, et ces enveloppes sont des lignes droites passant par le point* H.

Le point de contact étant en M', on obtiendra de même le système de points M', N', P', Q',..., O', homothétique au sytème $M, N, P, Q, \ldots, O$, par rapport au centre H; donc *les mouvements des points de contact des spires avec leurs enveloppes sont,* comme celui du point O, *des mouvements uniformément accélérés, et leurs accélérations sont entre elles comme les distances simultanées de ces points au point* H, *ou comme les sécantes des angles que leurs trajectoires font avec* OH.

On sait que la développée d'une spirale logarithmique est une spirale qui vient coïncider avec la première en la faisant tourner autour du pôle d'un angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{l.m}{m}$, dans le sens négatif.

Cela posé, du point O comme centre avec le rayon OM, décrivons une circonférence, et menons les rayons OM_1, OM_2, OM_3,..., faisant avec OM les angles α, 2α, 3α,.... Sur l'un quelconque de ces rayons OM_n, décrivons un segment capable de l'angle $\frac{\pi}{2} + \mu$, qui coupe la spirale aux points n_n, p_n, q_n,.... Si l'on fait tourner ce système autour de O, de l'angle $n\alpha$, de manière à ramener OM_n sur OM, les points n_n, p_n, q_n,... viendront se placer en N_n, P_n, Q_n,... sur la circonférence de diamètre MH, et deviendront *les points de contact de la* $n^{ième}$ *développée avec son enveloppe; les trajectoires de ces points seront des lignes droites passant par* H. Les systèmes de points M, N_n, P_n, Q_n,..., O et M', N'_n, P'_n, Q'_n,..., O' correspondant à deux positions M, M' du point de contact seront encore homothétiques par rapport au point H, et, par suite, *ces points décriront leurs trajectoires d'un mouvement uniformément accéléré et arriveront en même temps au point* H.

Lieu des centres de courbure. — Le centre de cour-

bure de la spirale relatif au point M est en C à la rencontre de la normale en M avec HO prolongée : celui de la développée relatif au point C s'obtient en construisant le triangle OCC_1 semblable à OMC ; le centre de courbure correspondant de la seconde développée, en construisant OC_1C_2 semblable à OMC, et ainsi de suite.

Les points C, C_1, C_2,... sont donc situés sur une spirale logarithmique égale à la première, de même pôle, les rayons égaux des deux spirales faisant l'angle α. Au bout du temps t, le système M, C, C_1, C_2,..., O sera remplacé par le système M', C', C'_1, C'_2,..., O' homothétique au premier par rapport au centre H; il en résulte que *les centres de courbure considérés décrivent d'un mouvement uniformément accéléré des trajectoires rectilignes aboutissant au point* H, *en restant à chaque instant sur une spirale logarithmique dont le mouvement est semblable à celui de la première.*

On a vu que *les points de contact des spires de la spirale, de sa développée, de la développée de cette développée, et, en général, de la développée d'ordre n avec leurs enveloppes sont, à chaque instant, sur une circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint le point de contact de la spirale roulante avec* MH *au point* H.

Question 1158

(voir 2e série, t. XIV, p. 95) ;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnée une masse quelconque dont chaque molécule attire suivant une loi qu'on suppose être représentée par une simple fonction de la distance au point attiré, on peut se proposer de trouver toutes les surfaces jouissant de cette propriété que les droites suivant lesquelles sont dirigées les attractions de la masse sur tous

les points matériels de l'une quelconque d'entre elles soient normales à une même surface. Démontrer que, pour chacune des surfaces cherchées, il existe une relation constante $f(R, V) = 0$ *entre le potentiel de la masse relatif à chaque point de cette surface et la grandeur* R *de l'attraction de la masse sur ce point. Si la relation ne contient pas* R, *elle donne des surfaces de niveau ; si elle ne contient pas* V, *elle donne ce qu'on peut appeler des surfaces d'égale attraction.*

(F. Didon.)

Soient S une surface remplissant la condition de l'énoncé ; S_1 l'une des surfaces auxquelles les directions de l'attraction sur chaque point de S sont normales ; M (x, y, z) un point quelconque de S ; M_1 (x_1, y_1, z_1) le point où la direction de l'attraction sur M rencontre S_1 ; $MM_1 = l$, valeur positive ou négative suivant que M_1 est la direction de l'attraction ou sur son prolongement ; $X = \frac{dV}{dx}$, $Y = \frac{dV}{dy}$, $Z = \frac{dV}{dz}$ les composantes de R parallèles à trois axes de coordonnées rectangulaires.

Les cosinus des angles de la direction de R avec les axes sont $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, ceux de la tangente en M_1 à une courbe tracée sur S_1 sont $\frac{dx_1}{ds_1}$, $\frac{dy_1}{ds_1}$, $\frac{dz_1}{ds_1}$. Pour que la direction de R soit normale à S_1, il faut que l'on ait

$$X\,dx_1 + Y\,dy_1 + Z\,dz_1 = 0.$$

Or

$$x_1 = x + \frac{X}{R}\,l,$$

$$y_1 = y + \frac{Y}{R}\,l,$$

$$z_1 = z + \frac{Z}{R}\,l;$$

d'où

$$dx_1 = dx + \frac{X}{R}\,dl + l\,d\frac{X}{R},$$

$$dy_1 = dy + \frac{Y}{R}\,dl + l\,d\frac{Y}{R},$$

$$dz_1 = dz + \frac{Z}{R}\,dl + l\,d\frac{Z}{R}.$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par $\frac{X}{R}$, $\frac{Y}{R}$, $\frac{Z}{R}$, et ayant égard à la relation

$$\left(\frac{X}{R}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$\frac{X}{R}\,d\frac{X}{R} + \frac{Y}{R}\,d\frac{Y}{R} + \frac{Z}{R}\,d\frac{Z}{R} = 0,$$

il vient

$$0 = \frac{X}{R}\,dx + \frac{Y}{R}\,dy + \frac{Z}{R}\,dz + dl;$$

d'où

$$dl = -\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{R} = -\frac{dV}{R}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que dl soit une différentielle exacte est qu'il existe entre R et V une relation

$$f(R, V) = 0,$$

en vertu de laquelle R sera une fonction de V, $R = \varphi(V)$, et l'on aura

$$l = -\int \frac{dV}{\varphi(V)} + C.$$

L'équation

$$f(R, V) = 0,$$

où R et V sont des fonctions de x, y, z, définit une surface S, lieu des points M, telle que les directions des

attractions de la masse attirante sur chaque point de cette surface seront normales à une même surface S_1. Pour chaque surface S, il existe une infinité de surfaces S_1, se déduisant toutes de l'une d'elles, en portant sur les normales, à partir de la surface, une longueur constante.

Si $f(R, V)$ ne contient pas R, on en tire, pour V, des valeurs constantes; $dV = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$, et R est normale à S, qui est une surface de niveau $l =$ const.

Si $f(R, V)$ ne contient pas V, on en tire pour R des valeurs constantes. Les surfaces S sont des *surfaces d'égale attraction*. On a alors

$$l = C - \frac{V}{R}.$$

Question 1175

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 288);

Par M. MORET-BLANC.

Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x^y = y^x + 1.$$

Cette équation est évidemment satisfaite par $y = 0$, quel que soit x.

Pour obtenir des solutions en nombres finis, remarquons d'abord que x et y doivent être peu différents l'un de l'autre, et que leur différence doit être un nombre impair.

1° Supposons d'abord $x > y$, et soit $x = y + n$. On devra avoir

$$(y + n)^y - y^{y+n} = 1,$$

ou, en divisant par y^y,

$$\left(1 + \frac{n}{y}\right)^y - y^n = \frac{1}{y^y}.$$

Or $\left(1+\frac{n}{y}\right)^{y}$ est $< e^{n} < 3^{n}$; donc il ne peut surpasser 3^{n}.

Si l'on fait $y=1$, on a

$$n=1, \quad x=2.$$

Pour $y=2$,

$$\left(1+\frac{n}{2}\right)^{2}-2^{n}=\frac{1}{2^{2}}.$$

Cette équation est satisfaite par $n=1$, d'où $x=3$. Pour $n=3$, le premier membre devient négatif, et *a fortiori* pour $n>3$.

On a ainsi les deux solutions

$$y=1, \quad x=2,$$
$$y=2, \quad x=3,$$

et il n'y en a pas d'autres avec $x>y$.

2° Soit $y>x$; posons $y=x+n$,

$$x^{x+n}-(x+n)^{x}=1,$$

et, en divisant par x^{x},

$$x^{n}-\left(1+\frac{n}{x}\right)^{x}=\frac{1}{x^{x}}.$$

x, d'après la discussion précédente, ne saurait être inférieur à 3; or, pour $x=3$, le premier membre devient $3^{n}-\left(1+\frac{n}{3}\right)^{3}$, valeur qui, pour $n=1$, surpasse déjà le second membre, et *a fortiori* pour $n>1$, car le terme positif croît avec n plus rapidement que le terme négatif. D'ailleurs, pour $x>3$,

$$x^{n}-\left(1+\frac{n}{x}\right)^{x}>4^{n}-e^{n}>4^{n}-3^{n}>1,$$

tandis que $\frac{1}{x^{x}}$ est <1.

Il n'y a donc pas de solution pour $y>n$, et les seules

solutions en nombres entiers positifs sont

$$y = 0, \quad x \text{ arbitraire},$$
$$y = 1, \quad x = 2,$$
$$y = 2, \quad x = 3.$$

Question 1180

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient 24 sur le côté de la base.

(É. LUCAS.)

Il faut que l'on ait

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = m^2$$

ou

$$n(n+1)(2n+1) = 6m^2.$$

Les trois facteurs n, $n+1$, $2n+1$ étant premiers entre eux, il faut que celui qui est pair soit le sextuple d'un carré, les deux autres étant des carrés impairs, ou bien que le nombre pair soit le double d'un carré, les deux nombres impairs étant l'un un carré, l'autre le triple d'un carré.

1° Soit n pair : il faut aussi qu'il soit divisible par 3, sans quoi l'un des deux autres facteurs serait de la forme $3k+2$, incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré. On aura donc

$$n = 6q^2, \quad n+1 = p^2, \quad 2n+1 = r^2,$$

ou

$$p^2 - 6q^2 = 1,$$
$$r^2 - 12q^2 = 1.$$

Les solutions entières de ces deux équations s'obtien-

nent, comme on sait, en développant $\sqrt{6}$ et $\sqrt{12}$ en fractions continues et prenant les termes des réduites correspondant aux quotients complets dont le dénominateur est égal à 1. Ce sont, dans les deux cas, les réduites de rang impair : on obtient ainsi les séries de valeurs

$$p = 1,\ 5,\ 49,\ 485,\ 4801,\ 47525,\ldots,$$
$$q = 0,\ 2,\ 20,\ 198,\ 1960,\ 19402,\ldots,$$
$$r = 1,\ 7,\ 97,\ 1351,\ 18217,\ldots,$$
$$q = 0,\ 2,\ 28,\ 390,\ 7432,\ldots.$$

q devant avoir la même valeur dans les deux équations, et ne pouvant être zéro, on n'a pas d'autre solution commune que

$$q = 2,\ p = 5,\ r = 7,$$

d'où

$$n = 24 \quad \text{et} \quad m^2 = 4.25.49 = 4900.$$

2° Soit n impair : $n+1$ sera pair et de forme $3h+2$, sans quoi l'un des nombres n, $2n+1$ serait de cette forme, incompatible avec celle d'un carré ou d'un triple carré; on aura alors

$$n = p^2,\ n+1 = 2q^2,\ 2n+1 = 3r^2,$$

d'où

$$p^2 - 2q^2 = -1,$$
$$p'^2 - 6r^2 = -2,$$

en posant $2p = p'$.

Les solutions de ces équations sont données par les réduites de rang pair dans le développement de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ en fractions continues. On obtient ainsi les séries de valeurs

$$p = 1,\ 7,\ 41,\ 239,\ 1393,\ 8119,\ldots,$$
$$q = 1,\ 5,\ 29,\ 169,\ 985,\ 5741,\ldots,$$
$$p' = 2p = 2,\ 22,\ 218,\ 1158,\ 12362,$$

d'où

$$p = 1,\ 11,\ 109,\ 579,\ 6181, \ldots,$$
$$r = 1,\ 9,\ 89,\ 881,\ 8721, \ldots.$$

La seule valeur commune de p est $p = 1$:

$$p = 1,\quad q = 1,\quad r = 1,\quad \text{d'où}\quad n = 1$$

Donc, en écartant le cas d'un seul boulet, le nombre des boulets de la pile ne sera un carré que lorsqu'elle en aura 24 sur le côté de la base.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. E. Rouché. — « Dans le numéro des *Annales*, qui est relatif au mois de novembre, mais *qui n'a paru qu'hier* 6 *décembre*, je trouve un article sur la discussion des équations du premier degré. Je m'empresse de reconnaître que M. Fontené, dont j'approuve particulièrement le mérite, ne pouvait, quand il vous a remis son travail, avoir eu connaissance de celui que j'ai communiqué à l'Académie sur le même sujet; mais je tiens à constater que ma Note, *ayant paru dans les* Comptes rendus *du* 29 *novembre*, a été publiée *avant* l'article cité. C'est pourquoi je vous prie d'insérer ces quelques lignes dans votre prochain numéro. »

Note de la Rédaction. — La réclamation de M. Rouché est parfaitement fondée. A l'égard de M. Fontené, nous dirons que son article nous a été remis au mois de septembre dernier, que nous l'avons fait composer immédiatement, et que c'est à notre grand regret qu'il n'a pas paru plus tôt. Le travail de M. Rouché et celui de M. Fontené sont donc bien indépendants l'un de l'autre.

SUR LA MÉTHODE DE MONGE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. LAGUERRE.

La méthode donnée par Monge pour intégrer les équations linéaires aux différences partielles du second ordre a été complétement élucidée, d'abord par les travaux d'Ampère et ensuite par ceux de Boole et de Bour; il me semble néanmoins qu'on peut la présenter avec plus de netteté et de brièveté qu'on ne le fait d'ordinaire.

I.

Sur la représentation de la forme

$$W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$$

par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

1. Soit $W = Hr + 2Ks + Lt - M + N(rt - s^2)$, où r, s, t représentent des variables quelconques; je vais d'abord montrer que l'on peut toujours représenter la forme W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et étudier les propriétés de ces diverses représentations.

En développant ce déterminant, on voit qu'il est de la forme indiquée, et, en identifiant les coefficients des quantités r, s, t,..., on aura, pour déterminer les inconnues a, b, c, d, α, β, γ, δ, les cinq équations

$$(1)\qquad M = d\gamma - c\delta,$$

$$(2)\qquad N = a\beta - b\alpha,$$

$$(3)\qquad L = b\gamma - c\beta,$$

$$(4)\qquad H = d\alpha - a\delta,$$

$$(5)\qquad 2K = d\beta - b\delta + a\gamma - c\alpha.$$

On a maintenant, d'après un théorème connu (*),

$$(b\gamma - c\beta)(a\delta - d\alpha) + (c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) + (a\beta - b\alpha)(c\delta - d\gamma) = 0,$$

ou encore, en vertu des relations précédentes,

$$(c\alpha - a\gamma)(b\delta - d\beta) = HL + MN;$$

par suite, si l'on fait, pour abréger, $G = K^2 - HL - MN$,

$$(5)'\qquad K + \sqrt{G} = d\beta - b\delta$$

et

$$(5)''\qquad K - \sqrt{G} = a\gamma - c\alpha.$$

2. Des équations (1), (2), (3), (4), (5)' et (5)'' il est facile de déduire un système de valeurs des indéterminées a, b, c, d,....

Remarquons d'abord que, parmi les déterminants mineurs $a\beta - b\alpha$, $a\gamma - c\alpha$,... qui entrent dans ces équations, il s'en trouve au moins un qui n'est pas nul, autrement la forme W s'annulerait identiquement. Sup-

(*) C'est le théorème de Fontaine; voir *Théorie des déterminants*, par Baltzer, p. 26.

posons, par exemple, que $a\beta - b\alpha$ soit différent de zéro : je mettrai les équations précédentes sous la forme

$$\mathrm{M} = d\gamma - c\delta, \quad \mathrm{N} = a\beta - b\alpha$$

et

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix} \ (^{*}).$$

La première de ces équations étant une conséquence des autres peut être négligée ; donnons maintenant à a, b, α et β quatre valeurs arbitraires satisfaisant à la relation $a\beta - b\alpha = \mathrm{N}$, la dernière relation donnera

$$\begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = -\frac{1}{\mathrm{N}} \times \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix} \times \begin{matrix} b & -a \\ -\beta & a \end{matrix},$$

qui déterminera les autres indéterminées d, c, δ et γ.

3. On voit, par ce qui précède, que l'on peut toujours représenter W par un déterminant de la forme indiquée, et, si G n'est pas nul, comme on peut prendre pour $\sqrt{\mathrm{G}}$ deux valeurs, il en résulte que toutes ces représentations se distribueront en deux groupes, le premier groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur $+\sqrt{\mathrm{G}}$ du radical et que je désignerai sous le nom de *représentations de première espèce*, le second groupe comprenant les représentations appartenant à la valeur

(*) J'indique ici, d'une façon abrégée, que le système linéaire du second membre s'obtient en composant les deux systèmes linéaires du premier membre dans l'ordre dans lequel ils sont placés. Cette seule relation tient donc lieu des relations (3), (4), (5)′ et (5)″; on en conclut en particulier que le déterminant du système linéaire du second membre est égal au produit des déterminants des systèmes du premier membre : en d'autres termes, que $d\gamma - c\delta = \mathrm{M}$. Cette relation, qui est une conséquence des autres, peut donc être mise de côté.

Voir, à ce sujet, mon Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe Cahier).

$-\sqrt{G}$; je les appellerai *représentations de seconde espèce.*

Si G était égal à zéro, il est clair qu'il n'y aurait qu'une seule espèce de représentations de W.

Pour abréger, si l'on a

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix},$$

je dirai que $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ est une représentation de la forme W.

4. Théorème I. — *Soient deux représentations de la forme* W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ *et* $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, *qui soient de systèmes différents ; on a les quatre relations*

$$(6)\begin{cases} ac' + bd' - ca' - db' = 0, & a\gamma' + b\delta' - c\alpha' - d\beta' = 0, \\ \alpha c' + \beta d' - \gamma a' - \delta b' = 0, & \alpha\gamma' + \beta\delta' - \gamma\alpha' - \delta\beta' = 0. \end{cases}$$

Si $G = 0$, *les mêmes relations ont lieu relativement à deux représentations quelconques de* W.

Démonstration. — Supposons G différent de zéro et soient deux représentations de W, $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$, qui soient respectivement de première et de seconde espèce; d'après ce que j'ai démontré ci-dessus (2), on aura

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} H & K-\sqrt{G} \\ K+\sqrt{G} & L \end{matrix}$$

et

$$\begin{matrix} \alpha' & a' \\ \beta' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} d' & -c' \\ -\delta' & \gamma' \end{matrix} = \begin{matrix} H & K+\sqrt{G} \\ K-\sqrt{G} & L \end{matrix},$$

ou encore

$$\begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} = \begin{matrix} \mathrm{H} & \mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}} \\ \mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}} & \mathrm{L} \end{matrix}$$

et par suite

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} \times \begin{matrix} d & -c \\ -\delta & \gamma \end{matrix} = \begin{matrix} d' & -\delta' \\ -c' & \gamma' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix}.$$

Supposons, pour un instant, que

$$\mathrm{M} = d\gamma - c\delta = d'\gamma' - c'\delta'$$

soit différent de zéro; multiplions les deux membres de l'égalité, à gauche par le système $\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix}$ et à droite par le système $\begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix}$, il viendra, après avoir divisé par M,

$$\begin{matrix} \gamma' & \delta' \\ c' & d' \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{matrix} = \begin{matrix} \alpha' & \beta' \\ a' & b' \end{matrix} \times \begin{matrix} \gamma & c \\ \delta & d \end{matrix},$$

relation qui, développée, donne précisément les quatre relations qu'il s'agissait de démontrer.

La démonstration précédente suppose M différent de zéro; mais, par un raisonnement connu, on montrera facilement que la proposition subsiste même quand M est nul.

Il est clair que, si $\mathrm{G} = 0$, la proposition est vraie relativement à deux représentations quelconques de W.

II.

Intégration de l'équation aux différences partielles du second ordre $\mathrm{W} = 0$.

5. Supposons maintenant que r, s, t soient les dérivées partielles du second ordre d'une fonction inconnue z par rapport aux variables x et y, les coefficients de W étant d'ailleurs des fonctions quelconques de x.

y, z, et des dérivées du premier ordre p et q, et soit à intégrer l'équation (7) $W = 0$.

Pour rester d'abord dans le cas le plus général, en supposant G différent de zéro, imaginons que nous ayons trouvé deux représentations de W par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

et de systèmes différents; soient $W = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$ et $W = \begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ ces deux représentations.

Cela posé, on aura les propositions suivantes :

Théorème II. — *Si $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation (7) renfermant une fonction arbitraire f, chacune des fonctions u et v est une solution du système d'équations simultanées du premier ordre*

$$(8)\quad \begin{cases} a\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c\,\dfrac{d\omega}{dp} + d\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\ \alpha\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \end{cases}$$

ou de ce second système d'équations

$$(9)\quad \begin{cases} a'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + b'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + c'\,\dfrac{d\omega}{dp} + d'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0, \\ \alpha'\left(\dfrac{d\omega}{dx}\right) + \beta'\left(\dfrac{d\omega}{dy}\right) + \gamma'\,\dfrac{d\omega}{dp} + \delta'\,\dfrac{d\omega}{dq} = 0. \end{cases}$$

On a posé, pour abréger,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) = \frac{d\omega}{dx} + p\,\frac{d\omega}{dz}$$

et

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right) = \frac{d\omega}{dy} + q\,\frac{d\omega}{dz}.$$

Démonstration. — Prenons successivement les dérivées, par rapport à x et par rapport à y, de l'équation $u = f(v)$, il viendra

$$\left(\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dp} + s\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dx}\right) + r\frac{dv}{dp} + s\frac{dv}{dq}\right]$$

et

$$\left(\frac{du}{dy}\right) + s\frac{du}{dp} + t\frac{du}{dq} = f'(v)\left[\left(\frac{dv}{dy}\right) + s\frac{dv}{dp} + t\frac{dv}{dq}\right],$$

et, puisque $u = f(v)$ est une intégrale première de l'équation $W = 0$, cette dernière doit provenir de l'élimination de $f'(v)$ entre les deux équations précédentes. On aura donc (du moins à un facteur constant près)

$$W = \begin{vmatrix} \left(\frac{du}{dx}\right) + r\frac{du}{dp} + s\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) + r\frac{dv}{dp} + s\frac{dv}{dq} \\ \left(\frac{du}{dy}\right) + s\frac{du}{dp} + t\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dy}\right) + s\frac{dv}{dp} + t\frac{dv}{dq} \end{vmatrix};$$

d'où, par une transformation facile,

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & s & t \\ -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix},$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

est une représentation de W. En vertu du théorème I, on voit donc que chacune des fonctions u et v satisfera au

système d'équations (8) ou au système (7), suivant que cette représentation sera de deuxième ou de première espèce.

Théorème III. — *Réciproquement, si u et v sont des solutions du système d'équations* (8) *ou du système* (9), $u=f(v)$, *où f désigne une fonction arbitraire, est une intégrale première de l'équation* (7).

Démonstration. — Soit, par exemple, ω une solution quelconque des équations (8)

$$a\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+b\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+c\frac{d\omega}{dp}+d\frac{d\omega}{dq}=0$$

et

$$\alpha\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\beta\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\gamma\frac{d\omega}{dp}+\delta\frac{d\omega}{dq}=0;$$

on a en outre les deux relations suivantes, qui ont évidemment lieu pour une fonction quelconque de x et de y,

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\frac{d\omega}{dp}r+\frac{d\omega}{dq}s=0,$$

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\frac{d\omega}{dp}s+\frac{d\omega}{dq}t=0.$$

Entre les équations précédentes, éliminons $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, $\frac{d\omega}{dp}$ et $\frac{d\omega}{dq}$, il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & r & s \\ 0 & 1 & s & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}=0,$$

ou encore $W=0$, d'où il résulte que $\omega=0$ est une intégrale de l'équation (7). Si u et v sont deux valeurs particulières de ω, les équations (8) étant linéaires,

$u - f(v)$ satisfait également à ces équations, quelle que soit la fonction f; la proposition est donc démontrée.

Théorème IV. — *En désignant par u et v deux solutions communes au système d'équations* (8), *et par u' et v' deux solutions communes au système* (9), *si des équations $u - f(v) = 0$ et $u' - \varphi(v') = 0$ on tire les valeurs de p et q en fonction de x, y et z, ces valeurs substituées dans $p\,dx + q\,dy$ rendent cette expression une différentielle exacte, en sorte que, pour achever l'intégration, il suffit d'intégrer l'équation*

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

Démonstration. — D'après ce que j'ai dit plus haut,

$$\begin{vmatrix} -\frac{du}{dp} & -\frac{du}{dq} & \left(\frac{du}{dx}\right) & \left(\frac{du}{dy}\right) \\ -\frac{dv}{dp} & -\frac{dv}{dq} & \left(\frac{dv}{dx}\right) & \left(\frac{dv}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} -\frac{du'}{dp} & -\frac{du'}{dq} & \left(\frac{du'}{dx}\right) & \left(\frac{du'}{dy}\right) \\ -\frac{dv'}{dp} & -\frac{dv'}{dq} & \left(\frac{dv'}{dx}\right) & \left(\frac{dv'}{dy}\right) \end{vmatrix}$$

sont deux représentations de W appartenant à des systèmes différents.

En vertu du théorème I, on a donc la relation

$$\frac{du}{dp}\left(\frac{du'}{dx}\right) + \frac{du}{dq}\left(\frac{du'}{dy}\right) - \frac{du'}{dp}\left(\frac{du}{dx}\right) - \frac{du'}{dq}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

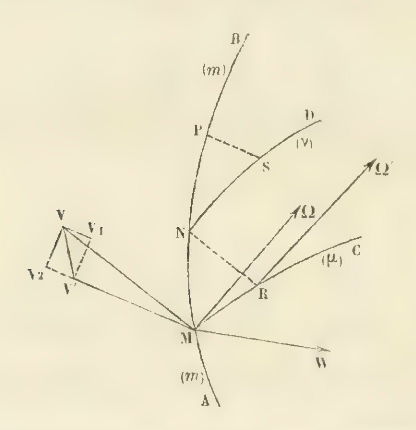
qui est la condition d'intégrabilité. Comme d'ailleurs on peut remplacer dans cette relation u par une solution quelconque du système (8), et u' par une solution quelconque du système (9), la proposition est démontrée.

6. Le cas où $G = 0$ donne lieu aux mêmes propositions, sauf qu'il suffit de considérer une seule représentation de W.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DU THÉORÈME DE CORIOLIS;

Par M. Félix LUCAS.

Soit AB la trajectoire effective d'un point m d'une figure invariable animée de deux mouvements superposés (l'un *relatif*, l'autre d'*entraînement*), et M la position que ce point occupe à l'instant t.



Si le mouvement d'entraînement venait à s'arrêter, m n'obéirait plus qu'au mouvement relatif; il posséderait alors une vitesse MV que nous supposerons connue, et une accélération MW qu'il s'agit de déterminer.

A cet effet, remarquons d'abord que, pendant l'élément de temps dt, le segment MV éprouve deux accroissements géométriques simultanés, savoir : 1° l'accroissement $VV_1 = MW \times dt$, occasionné par l'accélération

apparente dans le mouvement relatif, et 2° l'accroissement VV_2 occasionné par la vitesse angulaire d'entraînement $M\Omega$; ce second accroissement, évidemment dirigé suivant l'axe du moment de $M\Omega$ relativement à V, a pour valeur $\omega v \sin\alpha\, dt$, en désignant par ω la vitesse angulaire d'entraînement $M\Omega$, par v la vitesse relative MV, et par α l'angle $VM\Omega$. Les deux mouvements élémentaires du point V se composent en un seul VV', qui représente l'accroissement total du segment MV. Il suffit de tracer la droite MV' pour obtenir en grandeur, direction et sens, la vitesse relative du mobile M à l'instant $t + dt$. On a par conséquent

$$(1) \qquad \overline{MV'} - \overline{MV} = \overline{MW}.dt + \overline{VV_2};$$

d'où

$$(2) \qquad \overline{MW} = \frac{\overline{MV' - MV}}{dt} - \frac{\overline{VV_2}}{dt}.$$

Cela posé, soit MC la trajectoire d'un mobile fictif μ qui, occupant à l'instant t la position M, obéirait seulement au mouvement d'entraînement. Au bout de l'élément de temps dt, les deux mobiles m et μ viendront respectivement occuper les positions N et R; la droite RN sera parallèle à MV et égale à $MV.dt$; nous aurons par conséquent

$$(3) \qquad M\mathrm{v} = \frac{\overline{MN}}{dt} - \frac{\overline{MR}}{dt}.$$

Soit de même, pour l'instant $t + dt$, ND la trajectoire d'un nouveau mobile fictif ν qui, partant de N, obéirait seulement au mouvement d'entraînement. Au bout de l'élément de temps dt, les mobiles m et ν viendront respectivement occuper les positions P et S; la droite SP sera parallèle à MV' et égale à $MV'.dt$; nous aurons par

conséquent

$$(4)\qquad \overline{MV'} = \frac{\overline{NP}}{dt} - \frac{\overline{NS}}{dt}.$$

Retranchant l'équation (3) de l'équation (4), on trouve

$$(5)\quad \overline{MV'} - \overline{MV} = \left\{ \begin{array}{l} + \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\overline{NP}}{dt}, & \text{vitesse de } m \text{ à l'instant } t + dt, \\ - \frac{\overline{MN}}{dt}, & \text{vitesse de } m \text{ à l'instant } t; \end{array} \right. \\ - \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\overline{NS}}{dt}, & \text{vitesse de } \nu \text{ à l'instant } t + dt, \\ - \frac{\overline{MR}}{dt}, & \text{vitesse de } \mu \text{ à l'instant } t. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La vitesse du mobile ν à l'instant $t + dt$ peut être considérée comme la résultante de deux autres, savoir : 1° la vitesse contemporaine du mobile μ (placé en M), et 2° la vitesse infinitésimale du point N due à la vitesse angulaire d'entraînement $R\Omega'$. En négligeant les infiniment petits du second ordre, cette seconde composante est représentée par le segment $VV_2 = \omega\nu \sin\alpha\, dt$. On a par conséquent

$$(6)\quad \frac{\overline{MV'} - \overline{MV}}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} + \text{accélération totale du point } m, \\ - \text{accélération d'entraînement du point } \mu, \\ - \overline{VV_2}. \end{array} \right.$$

L'équation (2) devient

$$\overline{MW} = \left\{ \begin{array}{l} + \text{accélération totale}, \\ - \text{accélération d'entraînement}, \\ - \frac{\overline{2\,VV_2}}{dt}. \end{array} \right.$$

La troisième composante, égale en valeur absolue à

$2\omega v \sin\alpha$, n'est autre chose que l'axe du moment de $M\Omega$ relativement à V multiplié par 2 et changé de sens; on lui donne le nom d'*accélération centrifuge composée*.

En dernière analyse : *L'accélération apparente d'un point dans le mouvement relatif est la résultante : 1° de l'accélération absolue de ce point; 2° de son accélération d'entraînement; 3° de l'accélération centrifuge composée* $2\omega v \sin\alpha$.

REMARQUE SUR LA NOTE DE M. FLOQUET RELATIVE A L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER (*);

Par M. ESCARY,

Professeur au lycée de Châteauroux.

On sait qu'au point de vue analytique les surfaces du second ordre sont des surfaces réglées; car, d'une manière générale, assujettir une surface de degré m à contenir une droite indéterminée, c'est assujettir la droite à avoir $m+1$ points sur la surface: c'est donc imposer aux coefficients des équations de la surface et de la droite $m+1$ conditions. Or la droite la plus générale de l'espace dépend de quatre indéterminées; donc exiger qu'une surface de degré m contienne une droite donnée, c'est lui imposer $m-3$ conditions. D'après cela, nous voyons que, demander à une surface du troisième degré de contenir une droite donnée, c'est ne l'assujettir à aucune condition, et que par suite les surfaces du troisième degré renferment une droite réelle ou imaginaire. Quant aux surfaces du second ordre, on voit qu'il suffirait de leur imposer une condition de moins, et que, par con-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 120.

séquent, elles contiennent une droite réelle ou imaginaire d'une infinité de manières, ce qui veut dire qu'elles peuvent être engendrées par une ligne droite.

Cela étant rappelé, la méthode que M. Floquet vient de donner pour intégrer l'équation d'Euler, au moyen des lignes de courbure de l'hyperboloïde à une nappe et à axes inégaux, fait immédiatement songer à la possibilité d'atteindre le même résultat au moyen des lignes de courbure des deux autres surfaces du second ordre, à centre et à axes inégaux. C'est effectivement ce qui arrive; car, supposant $a > b > c$ et prenant

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{z}{c}\cos u + i\sin u,\\ \frac{y}{b} &= \frac{z}{c}\sin u - i\cos u,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{z}{c}\cos v - i\sin v,\\ \frac{y}{b} &= \frac{z}{c}\sin v + i\cos v\end{aligned}\right.$$

pour les deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à deux nappes, et

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{z}{c}\, i\cos u + \sin u,\\ \frac{y}{b} &= \frac{z}{c}\, i\sin u - \cos u,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{z}{c}\, i\cos v - \sin v,\\ \frac{y}{b} &= \frac{z}{c}\, i\sin v + \cos v\end{aligned}\right.$$

pour celles de l'ellipsoïde, un calcul identique à celui de M. Floquet conduit au même résultat. Il n'y a que cette seule différence, à savoir : le carré du module k^2

ayant pour valeur $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}$, dans le cas des deux hyperboloïdes, est égal à $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}$ lors de l'ellipsoïde.

On sait que les surfaces du second ordre concentriques et homofocales jouissent de la propriété remarquable de se couper orthogonalement et suivant leurs lignes de courbure. On sait aussi que Lamé est arrivé à édifier une théorie complète des fonctions elliptiques au moyen de la considération simultanée de ces mêmes surfaces; que la variable indépendante introduite par l'illustre géomètre, en vue d'assurer à l'équation aux différences partielles qu'il veut intégrer les simplifications analytiques ultérieures qui font le succès de sa méthode, et qu'il appelle le *paramètre thermométrique* de la famille de surfaces, ne met nullement en évidence, dans la solution du problème, l'influence probable des lignes de courbure déterminées, pour chaque valeur du paramètre, par les trois surfaces simultanées. Le procédé de M. Floquet, au contraire, en conduisant, par la considération des lignes de courbure de chaque surface prise séparément, à l'intégrale algébrique d'Euler, qui est la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques, a l'avantage de signaler cette influence et de faire acquérir par là une importance pratique nouvelle au beau théorème de Charles Dupin.

QUESTION DE LICENCE; FACULTÉ DE PARIS (1872);

PAR M. MORET-BLANC.

Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical et dirigé de haut en bas, et une poulie homogène de masse et de rayon connus, située dans un plan

méridien du cône et tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, un fil flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des brins du fil passe dans une ouverture infiniment petite, pratiquée au sommet du cône, et à son extrémité est attaché un point pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend librement suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système, en supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale et celle du point m' nulle. On néglige le poids du fil.

Je suppose que l'on puisse négliger tout enroulement et tout frottement du fil à l'ouverture.

Soient α l'angle que l'axe du cône fait avec les génératrices, a la vitesse initiale du point m, μ et ρ la masse et le rayon de la poulie, et, par suite, $\frac{1}{2}\mu\rho^2$ son moment d'inertie par rapport à son axe, ω sa vitesse angulaire de rotation au bout du temps t.

Étudions d'abord le mouvement de la poulie. Il faut, conformément au principe de d'Alembert, exprimer qu'à chaque instant les forces perdues se font équilibre, ou bien que les forces appliquées font équilibre aux forces effectives prises en sens contraire; c'est-à-dire qu'il faut que la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe soit nulle, ce qui donne l'équation

$$(m\cos\alpha - m')g\rho - (m + m' + \tfrac{1}{2}\mu)\rho^2\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

d'où

$$\rho\frac{d\omega}{dt} = \frac{(m\cos\alpha - m')g}{m + m' + \frac{1}{2}\mu}.$$

Le mouvement est donc uniformément accéléré, et

l'accélération du point m est

$$\rho \frac{d\omega}{dt} = \frac{(m \cos\alpha - m')g}{m + m' + \frac{1}{2}\mu} = g'.$$

Le point m est soumis à l'action d'une force mg' dirigée suivant la génératrice du cône, positive ou négative suivant qu'elle tend à augmenter ou à diminuer sa distance au sommet du cône, et à une force normale qui le maintient sur la surface conique; ces deux forces étant perpendiculaires à la composante horizontale de la vitesse, dirigée suivant la tangente au parallèle, cette composante reste constante et égale à a.

Cela posé, soient O le sommet du cône, A la position initiale du point m, et M sa position au bout du temps t. Je déterminerai cette position au moyen de deux coordonnées : la distance $OM = r$ du mobile au sommet du cône, et l'angle θ que, dans le développement de la surface conique sur le plan tangent en A, la génératrice OM fait avec OA. $r\theta$ est la longueur de l'arc de parallèle compris entre le mobile et la génératrice OA.

1° Soit $g' > 0$; on a

$$(1) \qquad r = r_0 + \tfrac{1}{2} g' t^2$$

et

$$d\theta = \frac{a\,dt}{r} = \frac{a\,dt}{r_0 + \frac{1}{2} g' t^2},$$

d'où

$$(2) \quad \theta = \int_0^t \frac{a\,dt}{r_0 + \frac{1}{2} g' t^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{g' r_0}} \operatorname{arc\,tang}\left(t \sqrt{\frac{g'}{2 r_0}}\right).$$

Si l'on élimine t entre les équations (1) et (2), on obtiendra l'équation polaire de la transformée de la trajectoire dans le développement de la surface conique sur le

plan tangent en A. De l'équation (2) on tire

$$t = \sqrt{\frac{2r_0}{g'}} \operatorname{tang}\left(\theta\sqrt{\frac{g' r_0}{2a^2}}\right);$$

cette valeur reportée dans l'équation (1) donne

$$r = r_0\left[1 + \operatorname{tang}^2\left(\theta\sqrt{\frac{g' r_0}{2a^2}}\right)\right] = \frac{r_0}{\cos^2\left(\theta\sqrt{\frac{g' r_0}{2a^2}}\right)}.$$

Cette équation peut aussi être regardée comme celle de la trajectoire conique; car, pour chaque valeur de θ, elle donne r, c'est-à-dire le parallèle du point correspondant, et $r\theta$ qui détermine la position de ce point sur le parallèle.

La formule (2) montre que θ reste toujours inférieur à la limite $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a^2}{g' r_0}}$.

2° Soit $g' < 0$, posons $g' = -g''$; on aura

$$(1') \qquad r = r_0 - \tfrac{1}{2} g'' t^2,$$

$$d\theta = \frac{a\,dt}{r} = \frac{a\,dt}{r_0 - \frac{1}{2} g'' t^2},$$

d'où

$$(2') \qquad \theta = \sqrt{\frac{2a^2}{g'' r_0}}\, l\, \frac{\sqrt{\frac{2r_0}{g''}} + t}{\sqrt{\frac{2r_0}{g''}} - t}.$$

Si, entre les équations (1') et (2'), on élimine t, on aura, dans le même système de coordonnées que précédemment, l'équation de la trajectoire.

De (2') on tire

$$t = \sqrt{\frac{2r_0}{g''}}\left(\frac{e^{\theta\sqrt{\frac{g'' r_0}{2a^2}}} - 1}{e^{\theta\sqrt{\frac{g'' r_0}{2a^2}}} + 1}\right),$$

et, en substituant dans (1'),

$$r = r_0 \left[1 - \left(\frac{e^{\theta\sqrt{\frac{g' r_0}{2a^2}}} - 1}{e^{\theta\sqrt{\frac{g' r_0}{2a^2}}} + 1} \right)^2 \right].$$

Le mobile m arriverait au sommet du cône au bout du temps $t = \sqrt{\frac{2r_0}{g''}}$, après une infinité de révolutions, si le fil, en s'enroulant autour de l'ouverture, ne créait un frottement qui arrêterait bientôt le mouvement de la poulie. Les formules précédentes ne sont donc applicables que pendant un temps assez court.

3° Si $g' = 0$, on aura

$$r = 0;$$

le mobile m décrira le parallèle du cône passant par sa position initiale.

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1874);

Par M. MORET-BLANC.

Étant donné le paraboloïde elliptique

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

évaluer l'aire de la partie de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'aire d'une surface est donnée en général par l'intégrale

$$A = \int d\omega \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

prise entre les limites convenables, $d\omega$ désignant la projection sur le plan des xy de l'élément de surface.

Dans le cas actuel, on a

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{dz}{dy} = \frac{y}{b},$$

et, par suite,

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

Ce facteur est constant pour tous les points qui satisfont à la condition $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \text{const.}$, c'est-à-dire pour tous les points qui se projettent sur une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée.

Si donc on divise celle-ci en éléments par des ellipses homothétiques et concentriques infiniment voisines, l'aire d'un de ces éléments compris entre deux ellipses consécutives

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = u \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a_2} + \frac{y^2}{b^2} = u + du$$

aura pour mesure $\pi ab\, du$, et l'élément de surface du paraboloïde dont il est la projection sera

$$\pi ab\, du \sqrt{1 + u}.$$

L'aire demandée aura donc pour valeur

$$\text{A} = \pi ab \int_0^1 du \sqrt{1 + u} = \tfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right) \pi ab.$$

Note. — La même question a été résolue par M. W.-H. Wisselink, professeur à l'École pour l'instruction moyenne, à Heerenveen (Pays-Bas).

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1874);

Par M. MORET-BLANC.

Un mobile m attiré vers un point O par une force fonction de la distance se meut de manière qu'il se trouve sur une spirale logarithmique ayant O pour pôle et tournant autour de ce point avec une vitesse angulaire constante donnée; quelle est la loi de la force attractive? Déterminer la nature la plus générale de la trajectoire qu'un mobile peut décrire sous l'influence d'une pareille force.

Soit $r = ae^{m\theta}$ l'équation de la spirale supposée fixe, ω sa vitesse angulaire de rotation; la position du mobile au bout du temps t devra satisfaire à l'équation

(1) $$r = ae^{m(\theta+\omega t)}$$

avec la condition

(2) $$r^2\,d\theta = c\,dt,$$

donnée par le principe des aires, ω étant positif ou négatif suivant que le mobile s'éloigne ou s'approche du pôle.

L'accélération suivant le rayon vecteur est égale à l'excès de la force centrifuge sur l'attraction rapportée à l'unité de masse; cette attraction est donc exprimée par

$$\mathrm{F} = r\frac{d\theta^2}{dt^2} - \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Or

$$r\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3},$$

$$\frac{dr}{dt} = m\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega\right)r = m\left(\frac{c}{r} + \omega r\right),$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = m\left(\omega - \frac{c}{r^2}\right)\frac{dr}{dt} = m^2 r\left(\omega^2 - \frac{c^2}{r^4}\right) = m^2\omega^2 r - \frac{m^2c^2}{r^3};$$

par suite,

$$F = \frac{(1 + m^2)c^2}{r^3} - m^2\omega^2 r.$$

Si l'on fait passer l'axe polaire par la position du mobile à l'époque $t = 0$, a sera la valeur initiale de r, et la composante perpendiculaire au rayon vecteur de la vitesse initiale sera

$$a\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{c}{a},$$

ce qui permet de déterminer c, connaissant cette composante, et réciproquement

Si le mobile s'éloigne du pôle, $\frac{dr}{dt}$ reste positif, et le mouvement continue indéfiniment dans le même sens. Si le mobile s'approche du pôle, ω est négatif,

$$\frac{dr}{dt} = m\left(\frac{c}{r} - \omega r\right);$$

le mobile continuera à s'approcher du pôle tant que l'on aura $r > \sqrt{\frac{c}{\omega}}$. Pour $r = \sqrt{\frac{c}{\omega}}$, $\frac{dr}{dt} = 0$, $\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$.

L'attraction et la force centrifuge se faisant alors équilibre, le mobile restera à la même distance du pôle, autour duquel il tournera avec la vitesse ω; mais cette espèce d'équilibre sera instable, car une légère impulsion tendant à éloigner le mobile du pôle ferait rentrer dans le premier cas.

Réciproquement, étant donnée la loi d'attraction

$$F = \frac{(1 + m^2)c^2}{r^3} - m^2\omega^2 r,$$

cherchons la trajectoire.

On a les deux formules, établies par Newton,

$$v^2 - v_0^2 = -2\int_{r_0}^{r} F\,dr,$$

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

La première donne

$$v^2 = v_0^2 + (1+m^2)c^2\frac{1}{r^2} + m^2\omega^2 r^2 - \left[(1+m^2)c^2\frac{1}{r_0^2} + m^2\omega^2 r_0\right].$$

La seconde donne ensuite

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = m^2\frac{1}{r^2} - \frac{m^2\omega^2}{c^2}r^2 - \left[(1+m^2)\frac{1}{r_0^2} + \frac{m^2\omega^2}{c^2}r_0^2 - \frac{v_0^2}{c^2}\right],$$

ou en posant, pour abréger,

$$(1+m^2)\frac{1}{r_0^2} + \frac{m^2\omega^2}{c^2}r_0^2 - \frac{v_0^2}{c^2} = 2m^2 h,$$

et faisant $\frac{1}{r} = u$,

$$\frac{du^2}{d\theta^2} = m^2\left(u^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{u^2} - 2h\right),$$

$$\frac{u\,du}{\sqrt{u^4 - 2hu^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} = \pm m\,d\theta$$

ou

$$\frac{2u\,du}{\sqrt{(u^2-h)^2 - \left(h^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}} = \pm 2m\,d\theta$$

et, en intégrant,

$$\frac{u^2 - k + \sqrt{(u^2 - k^2)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}}{u_0^2 - k + \sqrt{(u_0^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}} = e^{\pm 2m\theta},$$

u_0 étant la valeur de u pour $\theta = 0$.

Posons encore

$$u_0^2 - k + \sqrt{(u_0^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = 2a,$$

on aura

$$u^2 - k + \sqrt{(u^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = 2ae^{\pm 2m\theta}$$

et, par suite,

$$u^2 - k - \sqrt{(u^2 - k)^2 - \left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} = \frac{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}{2a} e^{\mp 2m\theta};$$

d'où, en ajoutant ces deux équations et divisant par 2,

$$u^2 = k + ae^{\pm 2m\theta} + \frac{k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}}{4a} e^{\mp 2m\theta}.$$

L'équation de la trajectoire la plus générale que le mobile puisse décrire sous l'influence de la force donnée sera donc

$$\frac{1}{r^2} = k + \mathrm{A}e^{2m\theta} + \mathrm{B}e^{-2m\theta}.$$

Les constantes k, A, B sont déterminées par les conditions initiales du mouvement, savoir : la distance initiale du mobile au pôle, la grandeur et la direction de la vitesse initiale.

QUESTION DE LICENCE (AOUT 1874);

Par M. MORET-BLANC.

On fait tourner une parabole autour de la tangente au sommet; déterminer, sur la surface de révolution ainsi engendrée, une ligne telle que, en chacun de ses points, la section normale de la surface qui passe par la tangente à la courbe ait un rayon de courbure infini.

Solution analytique.

$$z^2 = 2ax$$

étant l'équation de la parabole génératrice, celle de la surface de révolution sera

$$z^4 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = r, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = s, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

l'expression générale du rayon de courbure d'une section normale est, comme on sait,

$$R = \frac{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta},$$

où α et β sont les angles que la tangente à la section fait avec les axes Ox et Oy, de sorte que, dl étant la différentielle de l'arc,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dl}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{dl}.$$

Pour que le rayon de courbure soit infini, il faut qu'on ait

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

ou, en remplaçant r, s, t par leurs valeurs tirées de l'équation de la courbe, savoir

$$r = \frac{4a^4(2y^2 - x^2)}{z^7}, \quad s = -\frac{12a^4xy}{z^7}, \quad t = \frac{4a^4(2x^2 - y^2)}{z^7},$$

$$(1) \qquad (2x^2 - y^2)dy^2 - 6xy\,dx\,dy + (2y^2 - x^2)\,dx^2 = 0.$$

Telle est l'équation différentielle de la projection sur le plan xOy de la courbe cherchée. Cette équation peut s'écrire

$$2(x\,dy - y\,dx)^2 = (x\,dx + y\,dy)^2;$$

d'où

$$x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{2}(x\,dy - y\,dx),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \pm\sqrt{2}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

et, en intégrant,

$$l\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c} = \pm\sqrt{2}\,\text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

ou, en posant $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, arc tang $\frac{y}{x} = \theta$,

$$(2) \qquad r = ce^{\pm\sqrt{2}\theta},$$

c étant une constante, qu'on déterminera par la condition de faire passer la courbe par un point pris à volonté.

La projection de la courbe passant par un point donné de la surface se compose donc de deux spirales logarithmiques égales, tournées en sens contraire, dont l'angle avec le rayon vecteur a pour tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On arrive plus rapidement à ce résultat en supposant que l'on ait amené par une rotation le point considéré de la surface dans le plan de zx. On a alors, dans l'équation (1),

$$y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui indique que la tangente à la projection de la courbe fait avec le rayon vecteur un angle constant, dont la tangente est égale à $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans l'équation (2), on peut regarder c comme une constante arbitraire, ou bien lui donner une valeur fixe, et faire tourner la courbe autour du point O. Ainsi toutes les courbes satisfaisant à la condition énoncée peuvent être considérées comme les intersections de la surface de révolution par un même cylindre à base de spirale logarithmique, qu'on ferait tourner autour de l'axe Oz. On peut remarquer que ce cylindre est indépendant du paramètre de la parabole.

Solution géométrique.

La tangente à la section normale, dont le rayon de courbure est infini, est dirigée suivant une asymptote de l'hyperbole indicatrice.

Soient M un point de la surface par lequel doit passer la courbe, C et D les points où la normale en M rencontre l'axe de la surface et la directrice de la parabole méridienne passant par M; les rayons de courbure des sections normales principales, passant respectivement par les tangentes au parallèle et à la méridienne sont égaux à MC et à 2MD. Les axes de l'indicatrice dirigés suivant ces tangentes sont proportionnels aux racines carrées de ces rayons ou de leurs projections sur le plan d'un parallèle, c'est-à-dire à $\sqrt{r}$ et à $\sqrt{2r+p}$. Si l'on projette l'indicatrice sur le plan xOy, l'axe dirigé suivant la tangente au parallèle conserve sa longueur; celui qui est dirigé suivant la tangente à la parabole est réduit dans le rapport de la sous-tangente à la tangente à cette

courbe, c'est-à-dire de

$$\frac{2r}{\sqrt{2r(2r+p)}} = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r+p}}.$$

Or

$$\sqrt{2r+p}\,\frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r+p}} = \sqrt{2r};$$

la tangente de l'angle que l'asymptote de la projection fait avec le rayon vecteur est donc

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La projection de la courbe tracée sur la surface se compose donc de deux spirales logarithmiques, dont l'angle de la tangente avec le rayon vecteur a pour tangente $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Il y a deux spirales, parce qu'il y a deux asymptotes.

Note. — La même question a été résolue par MM. W.-H. Wisselink et Gambey.

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1874);

Par M. MORET-BLANC.

Intégrer le système

$$\frac{dx}{dt} + xf'(t) - y\varphi'(t) = 0, \qquad \frac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + yf'(t) = 0.$$

Si l'on ajoute ces équations, multipliées respectivement par x et y, puis par $-y$ et $+x$, on obtient le système équivalent

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + (x^2+y^2)f'(t) = 0,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + (x^2+y^2)\varphi'(t) = 0,$$

ou

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + f'(t)\,dt = 0,$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} + \varphi'(t)\,dt = 0,$$

qui s'intègre immédiatement et donne

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ce^{-f(t)},$$

$$\frac{y}{x} = \tang[c' - \varphi(t)].$$

Si l'on remplace t par z, ces deux intégrales représentent : la première, une famille de surfaces de révolution autour de l'axe Oz, ayant les rayons des parallèles correspondants proportionnels; la seconde, une famille de conoïdes ayant pour axe l'axe Oz et pour plan directeur le plan xOy. Tous ces conoïdes s'obtiennent en faisant tourner l'un d'eux d'un angle arbitraire autour de Oz.

Le système des deux équations représente la courbe d'intersection de l'une quelconque des surfaces de révolution par l'un des conoïdes.

Note. — La même question a été résolue par MM. W.-H. Wisselink et Gambey.

QUESTION DE LICENCE (AOUT 1874);

PAR M. MORET-BLANC.

Mouvement d'un point pesant assujetti à rester sur la surface d'un cylindre droit à axe vertical, et attiré vers un point fixe par une force proportionnelle à la distance; pression sur le cylindre.

Soient C le centre d'attraction, μ^2 l'attraction à l'unité de distance, et a le rayon du cylindre.

Je prends l'axe du cylindre pour axe des z, le plan horizontal passant par C pour plan des xy, et le prolongement de CO pour axe des x ou pour axe polaire.

Soient M la position du mobile, m sa projection sur le plan des xy, et θ l'angle que le rayon mO fait avec l'axe polaire.

Étude du mouvement vertical.—La composante verticale de la force accélératrice est $\mu^2 z + g$, et l'équation du mouvement vertical est

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -(\mu^2 z + g)$$

ou

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \mu^2\left(z + \frac{g}{\mu^2}\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z + \frac{g}{\mu^2} = A \sin \mu t + B \cos \mu t.$$

Soient z_0 et v_0 les valeurs initiales de z et de la vitesse verticale. On aura

$$B = z_0 + \frac{g}{\mu^2}, \quad A = \frac{v_0}{\mu},$$

d'où

$$z = \frac{v_0}{\mu} \sin \mu t + \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right) \cos \mu t - \frac{g}{\mu^2},$$

$$v = v_0 \cos \mu t - \mu \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right) \sin \mu t.$$

On voit que le mouvement vertical est périodique ; la durée de la période est $\frac{2\pi}{\mu}$.

La vitesse deviendra nulle et changera de signe aux

époques déterminées par l'équation

$$\operatorname{tang} \mu t = \frac{v_0}{\mu\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)},$$

d'où

$$\sin \mu t = \frac{\pm v_0}{\sqrt{v_0^2 + \mu^2\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2}},$$

$$\cos \mu t = \frac{\pm \mu\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)}{\sqrt{v_0^2 + \mu^2\left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2}}.$$

Ces valeurs reportées dans l'expression de z donneront les hauteurs maxima et minima

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{\mu}\right)^2 + \left(z_0 + \frac{g}{\mu^2}\right)^2} - \frac{g}{\mu^2}.$$

Si la vitesse initiale est nulle, ces hauteurs se réduisent à

$$\pm z_0.$$

Étude du mouvement de la projection horizontale du mobile. — Soit $CO = d$ la distance du centre d'attraction au centre du cercle : les composantes tangentielle et normale de l'attraction horizontale sont respectivement

$$\mu^2 d \sin\theta \quad \text{et} \quad \mu^2(a + d\cos\theta).$$

On a donc

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \mu^2 d \sin\theta;$$

d'où, en multipliant par $2\,ds = 2\,a\,d\theta$ et intégrant,

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

$$v = \pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)},$$

h_0 étant la vitesse horizontale initiale.

On voit que, pour les mêmes valeurs de θ, v reprendra, sauf le signe, les mêmes valeurs ; le mouvement sera donc périodique.

Il y a plusieurs cas à considérer :

1°
$$\cos\theta + \frac{h_0^2}{2\mu^2 ad} > 1.$$

La vitesse conservera toujours le même signe, et le mobile tournera indéfiniment autour du cylindre.

2°
$$\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 ad} = 1.$$

La vitesse deviendra nulle pour $\theta = 2\pi$, et, l'attraction horizontale étant alors normale à la surface, le mobile projection s'arrêtera, c'est-à-dire que le mouvement vertical se fera sur la même génératrice.

3°
$$\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 ad} < 1.$$

En désignant par θ_1 le plus petit angle positif ayant pour cosinus $\cos\theta_0 + \frac{h_0^2}{2\mu^2 ad}$, la vitesse s'annulera et changera de signe pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = 2\pi - \theta_1$; le mouvement du point m sera un mouvement oscillatoire. D'ailleurs, θ_1 étant $< \theta_0$, θ arrivera d'abord à la valeur $2\pi - \theta_1$, puis reviendra à la valeur θ_1, et ainsi de suite indéfiniment.

La pression contre le cylindre est égale à l'excès de la composante normale sur la force centrifuge

$$P = \mu^2 (a + d\cos\theta) - \frac{v^2}{a},$$

ou

$$P = \mu^2 [a + d(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)] - \frac{h_0^2}{a}.$$

On a

$$v = a\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)},$$

d'où

$$dt = \frac{a\,d\theta}{\pm\sqrt{h_0^2 + 2\mu^2 ad(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}.$$

Pour connaître à chaque instant la position du point m sur la circonférence, il faudrait trouver l'intégrale du second membre; cette intégrale dépend des fonctions elliptiques et ne peut être obtenue sous forme finie; mais la formule qui donne v permet de calculer les valeurs de v correspondant à des valeurs données de θ. Si donc on divise l'arc décrit en intervalles assez petits pour que la vitesse puisse être considérée comme variant d'une manière uniforme, on pourra supposer que chacun d'eux est décrit avec une vitesse moyenne entre la vitesse initiale et la vitesse finale correspondant à cet intervalle, et l'on aura le temps employé à le décrire en divisant l'espace par cette vitesse moyenne.

On pourra ainsi former un tableau contenant des valeurs correspondantes de θ et de t aussi rapprochées qu'on voudra; d'où, par interpolation ou bien en construisant une courbe ayant pour coordonnées les valeurs correspondantes de θ et de t, on déduira la valeur de θ correspondant à une valeur quelconque de t et réciproquement.

QUESTIONS NOUVELLES D'ARITHMÉTIQUE SUPÉRIEURE

Proposées par M. Édouard LUCAS.

1. Déterminer le dernier chiffre du $n^{ième}$ terme de la série de Lamé donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et les conditions initiales $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

2. Formuler les restes obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux termes donnés de la série u_p et u_q en fonction des rangs p et q.

3. Traiter les mêmes questions pour la série

$$0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ \ldots,$$

donnée par la loi de récurrence

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n,$$

et plus généralement pour les séries récurrentes du premier genre données par la loi

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

dans laquelle a et b désignent des nombres premiers entre eux.

4. Trouver l'expression générale du terme de la série en supposant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, quelles que soient les valeurs de a et b.

5. Si p désigne un nombre premier, et u_p l'expression

$$u_p = \frac{(a+\sqrt{b})^{p+1} - (a-\sqrt{b})^{p+1}}{\sqrt{b}},$$

démontrer que u_{p+1} est divisible par p, si b désigne un non-résidu quadratique de p; et que u_{p-1} est divisible par p, en exceptant les valeurs de a pour lesquelles $a^2 - b$ est divisible par p, si b désigne un résidu quadratique de p.

La première partie de ce théorème est due à Gauss.

6. Résoudre complétement l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$

en nombres entiers. Euler et Legendre n'ont pas donné toutes les solutions, et généralement celles pour lesquelles z est pair; ainsi, par exemple,

$$x = 919, \quad y = -271, \quad z = 438.$$

7. Résoudre complétement l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3$$

en nombres entiers. Fermat, qui avait particulièrement étudié cette équation, n'a pas donné les solutions pour lesquelles z est pair; ainsi

$$x = 73, \quad y = -17, \quad z = 38,$$

ce qui semble indiquer qu'il n'était point en possession de la méthode générale.

8. Résoudre complétement l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 + \ldots + (x+n-1)^2 = y^2,$$

pour les valeurs de n égales à 2, 11, 23, 24.

9. Démontrer, sans se servir de la Table des nombres premiers, que $2^{31} - 1$ est un nombre premier.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1875).

DEUXIÈME SESSION.

Compositions du 27 et du 28 août 1875.

Physique et Chimie.

I.

Le piston d'une pompe aspirante étant au plus bas de sa course et le tuyau d'aspiration plein d'air sous la pression atmosphérique mesurée par une colonne de mercure de $0^m,76$, on soulève le piston de $0^m,34$. La longueur du tuyau d'aspiration depuis le fond de la pompe jusqu'au niveau de l'eau étant de 6 mètres, on demande de calculer la hauteur à laquelle parviendra l'eau dans ce tuyau.

Rayon du tuyau d'aspiration......	$r = 0,01$
» du corps de pompe........	$R = 0,04$
Densité du mercure.............	$D = 13,592$

II.

Préparation des composés oxygénés de l'azote.

On calculera les *densités théoriques* du protoxyde et du bioxyde d'azote.

Densité de l'azote.............	0,972
» de l'oxygène..........	1,106

Épure.

On donne dans le plan horizontal de projection un cercle A de 8 centimètres de rayon, et un cercle B de

4 centimètres de rayon, tangent intérieurement au premier, en un point tel que la tangente θ en ce point soit perpendiculaire à la ligne de terre.

On demande : 1° de trouver l'intersection du tore engendré par la rotation du cercle B autour de la tangente θ et du cylindre dont le cercle A est la section droite ; 2° de représenter le tore supposé plein et existant seul en supprimant la partie comprise dans le cylindre.

On tracera à l'encre rouge les constructions faites pour trouver un point quelconque de l'intersection du tore et du cylindre et la tangente en ce point; on expliquera brièvement ces constructions dans une légende placée sur la feuille même.

Géométrie analytique.

On donne une circonférence et un point fixe P sur un de ses diamètres AB ; par le point P, on mène à cette circonférence la sécante PCD qui la rencontre en C et en D, et, par les quatre points A, B, C, D, on fait passer une hyperbole équilatère :

1° Trouver l'équation de cette hyperbole ;

2° Trouver le lieu du centre de cette hyperbole, quand la sécante PCD tourne autour du point P ;

3° Trouver, dans les mêmes conditions, le lieu des points de contact des tangentes menées à cette hyperbole perpendiculairement à AB ;

4° Indiquer, d'après ce qui précède, la construction géométrique des asymptotes d'une quelconque des hyperboles considérées, et appliquer cette construction au cas où la sécante PCD passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à AB.

Trigonométrie.

Calculer les angles et la surface d'un triangle connaissant les trois côtés :

$$a = 1764^{m},42,$$
$$b = 2175^{m},64,$$
$$c = 2346^{m},58.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE [ANNÉE 1875 (*)].

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES.

Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Dans chaque position, on mène à la conique des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers.

Déterminer le lieu des points de contact.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Hyperboloïde traversé par un cylindre.

Hyperboloïde de révolution. — Axe vertical au milieu de la largeur de la feuille.

Centre OO', $Oa = 100^{mm}$, $O'a = 80^{mm}$. Génératrice — bc, $b'c'$; $Ob = 35^{mm}$, $bc = 93^{mm}$.

Cylindre oblique.—Cylindre à base circulaire; centre de la base ω :

$$\omega\omega' = 120^{mm},$$
$$\omega f = 64^{mm},$$
Rayon de la base 65^{mm}.

(*) Questions retirées, sauf pour l'Algérie, le temps ayant manqué pour faire parvenir le second sujet.

La direction des génératrices est donnée par la droite ωb, $\omega' K'$; le point b est déterminé par $Ob = 35^{mm}$. Le point K' est déterminé par $aK' = 175^{mm}$.

L'hyperboloïde est un corps solide limité à un plan horizontal mn, tel que $O'm = O'a$. On représentera par des projections le solide qui reste, après que l'on a enlevé de l'hyperboloïde la portion qui se trouvait à l'intérieur du cylindre.

Nota. — La projection verticale de la courbe passe au-dessous de la ligne de terre. On pourra arrêter la ligne de terre qu'on prolongera en ligne de construction. On supposera alors que le plan horizontal est transparent, et la partie de la courbe située au-dessous de ce plan pourra être tracée en lignes pleines.

On peut construire les lignes des points multiples en projection et les points sur les contours apparents du cylindre; mais on engage les candidats à n'essayer ces constructions qu'après avoir fait l'épure, et secondairement.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1875.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Étant donnés un ellipsoïde, un plan P et un point A dans ce plan, trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et tels que la section de chacun de ces cônes par le plan P admette pour foyer le point A.

PHILOSOPHIE.

Deux triangles équilatéraux égaux, ABC, A'B'C', sont disposés dans deux plans parallèles, de façon que les

sommets de l'un et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du second sur le plan du premier soient les sommets d'un hexagone régulier. Les centres des deux triangles étant O et O′, on demande de déterminer la figure du solide commun aux deux tétraèdres O′ABC, OA′B′C′, et d'exprimer le volume de ce solide à l'aide du côté a des triangles équilatéraux et de la distance d de leurs plans.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.



On donne les côtés a, b, c d'un triangle ABC; des sommets A, B, C comme centres, on décrit trois circonférences qui se touchent deux à deux extérieurement : déterminer les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières.

RHÉTORIQUE.

1. Une sphère est posée sur un plan horizontal; sur le même plan repose par sa base un cône droit, dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère: on demande de couper ces deux corps par un plan horizontal, de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

2. Durée du jour dans les différents lieux du globe et aux différentes époques de l'année.

SECONDE.

1. Lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites données est constante. Lieu géométrique des points dont la somme des distances à trois droites données est constante.

2. Construire un triangle MNP, sachant que ses côtés vont passer par trois points fixes A, B, C, que les som-

mets M et N sont sur un cercle fixe passant par les points A et B, et enfin que l'angle en P a une valeur donnée.

3. Étant donnée une équation du second degré, former les équations qui ont pour racines :

1° Les carrés des racines de la première;

2° Les inverses des racines de la première.

Rechercher quels doivent être les coefficients de la première équation pour que l'équation qui admet pour racines les carrés des racines de la première ne diffère pas de cette première équation.

TROISIÈME.

1. Inscrire dans une circonférence un triangle ABC, dont l'angle A est connu et dont les deux côtés AC et BC sont tangents à deux cercles donnés.

2. Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fractiou décimale périodique simple de un, deux ou quatre chiffres.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

1. *Mécanique.* — Faire connaître les lois expérimentales du frottement de glissement. Qu'appelle-t-on coefficient de frottement? angle de frottement?

Un corps lancé sur un parquet uni et horizontal parcourt en glissant $1^m,80$ et s'arrête à cause du frottement; calculer sa vitesse initiale, en supposant le coefficient de frottement égal à 0,25.

2. *Géométrie descriptive.* — On donne une sphère de 4 centimètres de rayon, tangente aux deux plans de projection, et l'on demande d'y inscrire un tétraèdre régulier

ayant l'un de ses sommets sur le plan horizontal et l'une de ses arêtes perpendiculaire au plan vertical.

On fait tourner ensuite le système des deux corps, d'un angle de 45 degrés, autour d'une parallèle à la ligne de terre menée par le centre de la sphère, et l'on demande de construire les nouvelles projections du tétraèdre.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. C. Moreau, capitaine d'artillerie, à Calais. — Je viens de lire dans le numéro d'octobre des *Nouvelles Annales*, pages 438 et suivantes, l'intéressant travail de M. Vachette sur les « permutations rectilignes de $3q$ lettres égales trois à trois, quand deux lettres consécutives sont toujours distinctes ».

Je m'étais précisément occupé de la même question, il y a quelques années, et j'étais arrivé à une formule générale, dont la démonstration n'offre pas de difficulté et qui confirme les résultats obtenus par M. Vachette.

En supposant, comme le fait ce dernier, que la première et la dernière lettre de chaque permutation soient distinctes, et en désignant également par $B_{q,3}$ le nombre des permutations définies ci-dessus, j'avais trouvé, excepté pour $q = 1$,

$$B_{q,3} = 3q \sum_{k=0}^{k=q} (-1)^k \frac{q(q-1)\ldots(q-k+1)}{1.2.3\ldots k} \frac{(3q-2k-1)!}{(3!)^{q-k}} f(k),$$

$$f(k) = \sum_{n=0}^{n=k} \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{1.2.3\ldots n} A_n,$$

$$A_n = (A_1 + n - 1) A_{n-1} + 2(n-1) A_{n-2},$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 3q - 2k - 2.$$

En effectuant les calculs, par exemple pour $q = 7$, on obtient successivement :

$$k = 0,$$

$A_0 = 1$ . . . . $f(0) = 1$;

$$k = 1,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 17$ . . . . $f(1) = 18$;

$$k = 2,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 15,\quad A_2 = 242$ . . . . $f(2) = 273$;

$$k = 3,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 13,\quad A_2 = 184,\quad A_3 = 2812$. $f(3) = 3404$;

$$k = 4,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 11,\quad A_2 = 134,\quad A_3 = 1786,$
$A_4 = 25808$ . . . . $f(4) = 33801$;

$$k = 5,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 9,\quad A_2 = 92,\quad A_3 = 1048,$
$A_4 = 13128,\quad A_5 = 179048$. . . . . $f(5) = 256134$;

$$k = 6,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 7,\quad A_2 = 58,\quad A_3 = 550,$
$A_4 = 5848,\quad A_5 = 68728,\quad A_6 = 883216$. $f(6) = 1395217$;

$$k = 7,$$

$A_0 = 1,\quad A_1 = 5,\quad A_2 = 32,\quad A_3 = 244,$
$A_4 = 2144,\quad A_5 = 21248,\quad A_6 = 233920,$
$A_7 = 2828096$. $f(7) = 4996032$;

et ensuite, en mettant en facteur $P_7 = 1.2.3.4.5.6.7$,

$$P_7 = 1.2.3.4.5.6.7,$$

$$B_{\cdot 3} = P_7 \left(\begin{array}{rcr} 36212176000 & - & 72043171200 \\ 64273809600 & - & 33392559200 \\ 10931243400 & - & 2259101880 \\ 273462532 & - & 14988096 \\ \hline 111690691532 & - & 107709820376 \end{array} \right)$$

ou enfin

$$B_{7,3} = 398087\,1\,156\,P_7.$$

C'est bien le nombre auquel M. Vachette est parvenu par une autre voie (page 457 de l'article précité).

Extrait d'une lettre de M. E. Lucas. — On lit, page 305 du tome XIII de la 2[e] série, article de M. Transon :

« Enfin je ferai voir que Wronski... », et page 316 : « Toutefois si l'on accorde que la priorité d'une idée... ».

Or on lit, dans la *Géométrie de position* de Carnot, antérieure de *seize* ans à l'ouvrage cité de Wronski, pages 336 et 337 :

« Il me semble même que la Géométrie ne devrait point se borner là, et qu'elle pourrait embrasser les mouvements qui ne résultent pas de l'action et de la réaction des corps les uns sur les autres. . . .

» Or ce problème est absolument indépendant des règles de la communication des mouvements, puisque, par hypothèse, il n'y a aucun mouvement communiqué, ni détruit : les mouvements qui ont lieu alors peuvent donc être appelés *mouvements géométriques*, et leur recherche n'appartient point à la Mécanique proprement dite ; elle est du ressort de la Géométrie, et je crois que, pour compléter cette dernière science, il faudrait que les propriétés de ces mouvements y fussent développées. »

Et plus loin, page 338 :

« Les grandes difficultés analytiques qu'on rencontre dans la science de l'équilibre et du mouvement viennent principalement de ce que la théorie des mouvements géométriques n'est point faite; elle mérite donc toute l'attention des savants. »

Ainsi l'idée de la Cinématique n'est ni d'Ampère, ni

de Wronski; elle appartient tout entière à Carnot, ou peut-être à un géomètre plus ancien.

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie des équations aux dérivées partielles de premier ordre; par M. Mansion (Paul), professeur à la Faculté des Sciences de Gand. — Mémoire couronné par l'Académie royale de Bruxelles. In-8 de XVI-289 pages; 1875. Prix : 6 francs.

Cet Ouvrage contient le résumé des recherches de Lagrange, Pfaff, Jacobi, Bour, Weiler, Clebsch, Korkine, Boole, Mayer, Cauchy, Serret et Lie, sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Les travaux de ces géomètres sont groupés dans les subdivisions suivantes :

Introduction. — *Génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* — Livre I. *Méthode de Lagrange et de Pfaff.* — Livre II. *Méthode de Jacobi.* — Livre III *Méthode de Cauchy et de Lie.* — Appendice. *Méthode de Lie comme synthèse des méthodes antérieures.*

L'Introduction contient, de plus que la partie correspondante des Ouvrages analogues de MM. Imschenetsky et Graindorge, l'exposé des idées de M. Lie relativement à la génération des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Ces idées ouvrent à la Science de nouveaux horizons et conduiront infailliblement, dans un avenir prochain, à une transformation complète de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Dans le Livre premier sont analysés les travaux de Lagrange et de Pfaff. On a utilisé dans cette partie de l'Ouvrage, plus qu'on ne le fait communément, la théorie des déterminants fonctionnels. On a pu rattacher la méthode de Pfaff à celle de Lagrange, en apparence si différente, en résumant les premiers

Mémoires de Jacobi. Ces Mémoires, qui comblent une véritable lacune dans la théorie des équations aux dérivées partielles, font comprendre complétement, d'abord l'étroite connexion qui existe entre les équations aux dérivées partielles linéaires et certaines équations différentielles ordinaires, ensuite les relations de la méthode de Pfaff avec celle de Lagrange. Les applications nombreuses de la théorie générale que contiennent les écrits de Lagrange et de Monge, ainsi que quelques Mémoires de Hesse et Schläfli, se trouvent aussi dans le premier Livre.

Les trois premiers Chapitres du deuxième Livre renferment l'analyse des travaux de Jacobi et de Bour. Une petite erreur, qui s'est glissée dans l'exposition de ce dernier, est corrigée d'après Mayer. Le Chapitre IV contient des calculs d'une admirable élégance, dus à Clebsch, où l'éminent algébriste fait connaître une notable simplification de la méthode de Jacobi, trouvée par Weiler en 1863. Les Chapitres V et VI sont consacrés à des méthodes où l'on procède par des changements de variables. Dans la méthode de Korkine (1868), on dispose de la fonction arbitraire de l'intégrale générale de l'une des équations données, de manière à satisfaire aux autres équations : on transforme ainsi le système en un autre qui contient une équation et une variable de moins. Korkine n'a donné que l'énoncé des théorèmes fondamentaux de sa méthode, mais on a pu reconstruire sa démonstration. La méthode de Boole, qui s'applique seulement aux équations linéaires, procède à peu près comme celle de Korkine. La méthode de Mayer, qui vient ensuite, s'applique aussi aux équations linéaires, dont elle ramène l'intégration à celle de certains systèmes d'équations différentielles totales. Une transformation de variables et l'emploi d'un théorème nouveau très-remarquable permettent à Mayer de réduire l'intégration des systèmes d'équations linéaires de Jacobi au dernier degré de simplicité.

Le Livre troisième contient le résumé des travaux de Cauchy et de Serret, ainsi que la méthode de Lie d'après Mayer. C'est la partie la plus originale de l'Ouvrage. En introduisant les idées de Lie dans le dernier mode d'exposition de Cauchy,

on peut rattacher toutes les recherches des géomètres sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à la notion fondamentale de caractéristique. En particulier, on retrouve très-facilement les principaux résultats de Serret et les modifications apportées par Mayer et Darboux à la méthode de Pfaff.

Le court Appendice qui termine l'Ouvrage contient, au moyen des idées de Lie, un aperçu synthétique des méthodes principales, qui permet au lecteur d'entrevoir leur fusion prochaine entre les mains du géomètre norvégien. Les derniers Mémoires de Lie n'ont pu être résumés; l'auteur s'est contenté d'en donner une liste exacte avec l'indication des recueils où l'on peut les trouver.

L'Introduction et les Notes renferment l'histoire complète de la *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*.

RECTIFICATION.

1. Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les mentionner, des solutions de la question 1175 par MM. Meyl, ancien capitaine d'artillerie à la Haye, Moreau, capitaine d'artillerie à Calais; de la question 1174 par MM. Thornton, de l'Université de Virginia (États-Unis), Ch. Wagner, assistant à l'École Polytechnique de Vienne, Louis Goulin, élève du Lycée de Rouen; de la question 1172 par M. Lucien Lévy, ancien élève de l'École Polytechnique; des questions 1178 et 1179 par M. Kruschwitz; de la question 1153 par M. Ch. Chabanel, à Reims; de la question de Mathématiques spéciales proposée en 1874 au Concours général des départements par MM. de Coatpont et G. de Beauséjour, élèves du collége Stanislas; de la question de Mathématiques spéciales proposée en 1874 au Concours général de Paris par M. B. Niewenglowski, à Reims.

2. A la page 527 du tome précédent, question 6 : *Au lieu de* différence, *lisez* somme.

QUESTIONS.

1188. Si deux mobiles se meuvent dans un plan sur des courbes quelconques, mais avec des vitesses respectivement égales à chaque instant, la droite qui les joint touche continuellement son enveloppe au point symétrique par rapport à son milieu, de celui où elle est rencontrée par la bissectrice de l'angle des deux tangentes.

Ce théorème s'applique en particulier à l'enveloppe des cordes qui sous-tendent dans une courbe quelconque des arcs de longueur constante (*).

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1189. La droite qui se meut de manière à rencontrer à chaque instant deux courbes quelconques sous deux angles respectivement égaux touche continuellement son enveloppe au point où elle est coupée par la droite qui joint les deux centres de courbure.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1190. Démontrer que la formule

$$1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1^2)}{2.3.4} - \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{2.3.4.5.6} + \frac{2^8 n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)(n^2 - 3^2)}{2.3.4.5.6.7.8} + \ldots$$

a pour valeur -1 ou $+1$, selon que n (**) est un nombre impair ou un nombre pair. (S. RÉALIS.)

(*) Lorsque les cordes sous-tendent des segments de surface constante, le contact se trouve toujours au milieu de la corde.

(**) Cette *question*, proposée par l'auteur, en 1871, dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, n'a pas encore été résolue.

NOTE SUR LES COURBES QUE REPRÉSENTE L'ÉQUATION $\rho^n = A \sin n\omega$;

PAR M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. Les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$(1) \qquad \rho^n = A \sin n\omega$$

jouissent de propriétés fort remarquables, et se sont souvent présentées, dans des recherches d'un ordre élevé, à des géomètres tels que Maclaurin, Euler, l'Hôpital, Fagnano, Riccati, Lamé, MM. Serret, O. Bonnet, W. Roberts, etc. Leur théorie mériterait certainement d'être vulgarisée. A ce titre, il ne sera peut-être pas inutile d'en placer un court résumé sous les yeux des personnes qui se livrent à l'étude de la Géométrie. J'ai eu soin d'y mentionner les sources où l'on retrouverait les démonstrations, toutes les fois qu'elles ont été publiées à ma connaissance. Pour les autres cas, la recherche de ces démonstrations pourra fournir un exercice, en général facile.

L'équation (1) peut également présenter la forme

$$(2) \qquad \rho^m \sin m\omega = B$$

si n prend des valeurs négatives $-m$. Ce nombre n peut également devenir fractionnaire et même incommensurable. Nous l'appellerons l'*ordre* de la courbe, quels que soient sa valeur et son signe. Ajoutons encore que les équations (1) et (2) pourront encore être écrites de la manière suivante :

$$(3) \qquad \rho^n = C \cos n\omega, \qquad \rho^m \cos m\omega = D,$$

au moyen d'un simple déplacement de l'axe polaire. Toutes ces formes étant équivalentes, nous adopterons la première pour fixer les idées.

2. Les propriétés générales qui vont suivre fourniront autant de théorèmes particuliers pour un assez grand nombre de courbes spéciales, correspondant aux valeurs les plus simples de l'ordre n. Parmi elles figurent des lignes tout à fait usuelles, telles que la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole, etc. Quelques-unes de ces propriétés sont peu connues; d'autres, très-répandues, fourniront pour les énoncés généraux d'utiles vérifications :

$n = 2$ lemniscate de Bernoulli ;

$n = \frac{3}{2}$ courbe dont l'arc représente exactement la fonction elliptique de première espèce du module $\sin 15^\circ$ ou du module complémentaire (William Roberts, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XII, p. 447) ;

$n = 1$ cercle ;

$n = \frac{2}{3}$ podaire du centre de la lemniscate (William Roberts, *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XI, p. 283) ;

$n = \frac{1}{2}$ cardioïde, limaçon de Pascal, conchoïde du cercle, épicycloïde (Salmon, *Higher plane curves,* n° 110) ;

$n = \frac{1}{3}$ lieu des sommets des paraboles ayant même foyer, et tangentes à un cercle passant par ce foyer (Giuseppe Sacchi, *Nouvelles Annales,* 1re série, t. XIX, p. 39) ;

$n = 0$ spirale logarithmique (Haton de la Goupillière, *Thèses*, p. 30, 1857; Allégret, *Nouvelles*

Annales, 2e série, t. XI, p. 163, année 1872 : NICOLAÏDÈS, *Analectes,* p. 167, année 1872) ;

$n = -\frac{1}{3}$ caustique par réflexion de la parabole pour des rayons perpendiculaires à l'axe (marquis DE L'HOPITAL, *Analyse des infiniment petits ; voir,* pour les propriétés de cette courbe, *Nouvelles Annales,* 2e série, t. V, p. 21 et 27) ;

$n = -\frac{1}{2}$ parabole ;

$n = -\frac{2}{3}$ enveloppe des perpendiculaires aux rayons vecteurs de l'hyperbole équilatère (VIEILLE, *Cours complémentaire,* p. 145) ;

$n = -1$ ligne droite ;

$n = -\frac{3}{2}$ enveloppe du côté d'un angle droit, dont l'autre côté pivote sur le centre d'un triangle équilatéral, le sommet de l'angle restant à de telles distances des trois sommets du triangle que leur produit soit constamment égal au cube du rayon de cercle circonscrit (W. ROBERTS, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XII, p. 447) ;

$n = -2$ hyperbole équilatère.

3. Lorsque n est un nombre entier et positif, les courbes (1) sont le lieu des points, tels que le produit de leurs distances aux n sommets d'un polygone régulier soit égal à la $n^{ième}$ puissance du rayon du cercle circonscrit (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique,* XXXVIIIe Cahier, p. 89).

4. Si l'on envisage l'ensemble des courbes (P), défi-

nies par la condition que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier soit une constante *arbitraire* [l'une de ces courbes P étant, par suite, la ligne (1), d'après la proposition précédente], toutes leurs trajectoires orthogonales (Q) seront des courbes (1) de l'ordre $-n$ (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 90).

5. Chacune de ces lignes (Q) jouit de cette propriété que, si l'on joint un quelconque de ses points aux n sommets du polygone, la direction moyenne de ces droites reste parallèle à elle-même (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 91).

6. Le lieu des points d'inflexion des lignes (P), ainsi que celui de leurs points de plus grande courbure, sont deux courbes (1) du même ordre n (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 91 et 93).

7. L'angle de la tangente avec le rayon vecteur est égal à n fois l'inclinaison de ce dernier sur l'axe polaire (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. VII, p. 118).

8. Courbe la plus générale, telle que, si on l'engendre par une rotation uniforme du rayon vecteur, la tangente tourne uniformément, soit dans l'espace absolu, soit relativement à un observateur qui participe à la rotation du rayon vecteur (à démontrer).

9. L'angle de deux tangentes menées aux extrémités d'une corde passant par le pôle est constant (FRENET, *Exercices de Calcul différentiel et intégral*, problème CXXXI, p. 12 et 57).

10. L'angle des tangentes menées aux extrémités de

deux rayons vecteurs quelconques est égal à $n+1$ fois celui de ces rayons (BARBIER et LUCAS, *Nouvelles Annales,* 2e série, t. V, p. 27) (*).

11. Si l'on fait varier A et C dans les équations (1) et (3), on obtient deux familles orthogonales conjuguées (LAMÉ, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. I, p. 86; FRENET, *Exercices de Calcul différentiel et intégral,* problème XXII, p. 189 et 205).

12. Plus généralement, si l'on fait tourner d'un angle quelconque α la famille de courbes (1) autour du pôle, elle fournit alors l'ensemble des trajectoires qui traversent les mêmes lignes dans leur première situation sous l'angle constant $n\alpha$ (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Journal de l'École Polytechnique,* XXXVIIIe Cahier, p. 102).

13. Courbe la plus générale, telle que la normale soit proportionnelle à la puissance $1-n$ du rayon vecteur (à démontrer).

14. Courbe la plus générale, telle que la projection du rayon vecteur sur la normale soit proportionnelle à la puissance $1+n$ du rayon vecteur (à démontrer).

15. Le rayon de courbure est égal à la fraction $\frac{1}{1+n}$ de la normale (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *Thèses,* p. 34).

16. La projection du centre de courbure sur le rayon vecteur décrit une courbe semblable à la première dans le rapport $\frac{n}{n+1}$ (J.-A. SERRET, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. VII, p. 118).

(*) Par exemple, dans la caustique de parabole ($n = -\frac{1}{3}$), les tangentes aux trois intersections par un même rayon vecteur focal forment toujours un triangle équilatéral (BARBIER et LUCAS, *ibidem,* p. 30).

17. Le cercle osculateur intercepte sur le rayon vecteur une corde qui est une fraction constante $\frac{2}{n+1}$ de ce rayon (MACLAURIN, *Traité des fluxions,* Chapitre XI, proposition XXXIV, corollaire IV, année 1740; NICOLAIDÈS, *Analectes,* p. 65).

18. Cette courbe est la plus générale qui jouisse de la proposition précédente (ALLÉGRET, *Nouvelles Annales,* 2e série, t. XI, p. 162).

19. Le rayon de courbure de la développée des courbes (1) est égal à la fraction $\frac{1-n}{1+n}$ de la longueur comprise sur la normale de cette développée entre le rayon vecteur de la proposée et son centre de courbure (à démontrer).

20. La podaire des courbes (1) est une ligne du même groupe de l'ordre $\frac{n}{1+n}$ (MACLAURIN, *Philosophical Transactions,* n° 356, année 1718).

21. L'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs est une courbe du même groupe d'ordre $\frac{n}{1-n}$ (proposition équivalente à la précédente.)

22. La $k^{ième}$ podaire est une courbe du même groupe d'ordre $\frac{n}{1+nk}$ (MACLAURIN, *Géométrie organique;* W. ROBERTS, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1re série, t. XII, p. 447).

23. Lorsque l'ordre de la courbe est exprimé par l'inverse d'un nombre entier négatif, $n = -\frac{1}{N}$, il y a tou-

jours une podaire de cette courbe qui est une ligne droite. C'est la $(N-1)^{ième}$ $\left(\text{à démontrer et à vérifier pour } n = -\frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{3}\right)$.

24. Si l'on prend tous les rayons vecteurs d'une *courbe quelconque* pour *rayon normal* d'une courbe (1) d'ordre $n = \frac{1}{N}$ (N désignant un nombre entier) l'enveloppe de toutes ces lignes sera la $N^{ième}$ podaire de la ligne quelconque proposée (*) (W. ROBERTS, *Annales de Tortolini,* t. IV, p. 134, année 1861).

25. Si l'on envisage pour un même pôle toutes les courbes (1) d'ordre $n = -\frac{1}{N}$, menées tangentiellement à une *ligne quelconque,* le lieu de leurs sommets sera encore la $N^{ième}$ podaire de cette courbe (W. ROBERTS, *ibid.*).

26. L'anticaustique par réflexion des courbes (1), pour des rayons lumineux émanés du pôle, est une courbe du même groupe de l'ordre $\frac{n}{n+1}$ (à démontrer).

27. Si une des courbes (1) roule sur une ligne égale, en partant de la coïncidence de points homologues, la roulette du pôle est une ligne du même groupe d'ordre $\frac{n}{n+1}$ (à démontrer).

28. Si la courbe (1) roule sur une ligne droite, la roulette du pôle est une courbe dont l'équation a été donnée

(*) Par exemple, l'enveloppe des paraboles homofocales, dont le sommet décrit une courbe quelconque, est la podaire de la podaire de cette ligne. (*Ibidem.*)

par M. O. Bonnet (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1[re] série, t. IX, p. 106) et qui jouit entre autres propriétés de celle de rendre maximum l'intégrale

$$\int y^{-\frac{n}{1+n}} ds$$

(Euler, *Methodus inveniendi*, p. 50; *voir* aussi J. Sacchi, *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. XII, p. 177 et 178, et l'énoncé 38 de la présente Notice).

29. La polaire réciproque de la courbe (1), par rapport à un cercle concentrique, est une ligne du même groupe de l'ordre $-\frac{n}{n+1}$ (Salmon, *Higher plane curves*, p. 103).

30. La transformée par rayons vecteurs réciproques est une courbe du même groupe d'ordre égal et de signe contraire (évident).

31. Lorsque l'ordre n est entier et positif, la longueur totale de la courbe (1) s'exprime de la manière suivante, au moyen des intégrales eulériennes de seconde espèce :

$$\frac{\sqrt[n]{A}}{2^{\frac{n-1}{n}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Lorsqu'au contraire n est quelconque, cette fraction, divisée par $2n$, mesure l'arc compris entre la tangente au pôle et un rayon qui fait avec elle un angle égal à la $n^{ième}$ partie d'un angle droit. (J.-A. Serret, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1[re] série, t. VII, p. 116; *voir* en outre, sur la rectification de ces courbes au moyen des transcendantes elliptiques : Fagnano, *Produzioni matematiche*, t. II, p. 375 à 414; W. Roberts,

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1[re] série, t. XII, p. 447 ; ALLÉGRET, *Annales de l'École Normale,* 2[e] série, t. II, p. 149).

32. La rectification de deux podaires, l'une d'ordre pair et l'autre d'ordre impair, conduit à celle de toutes les podaires successives (MACLAURIN, *Tractatus de curvarum constructione, Philosophical Transactions,* p. 806, année 1718).

33. La différence de l'arc d'une podaire d'ordre quelconque et de n fois l'arc correspondant de celle qui la précède de deux rangs est toujours rectifiable. (MACLAURIN, *ibid.*, p. 807).

34. L'aire qui correspond à l'arc spécifié ci-dessus (31) a pour valeur

$$\frac{\pi A^{\frac{2}{n}}}{2^{\frac{n+2}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)};$$

le moment d'inertie de cette aire

$$\frac{\pi A^{\frac{4}{n}}}{2^{\frac{3n+4}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{2}{n}\right)};$$

le moment d'inertie de l'arc en question

$$\frac{A^{\frac{3}{n}}}{n2^{\frac{2n-3}{n}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};$$

généralement le potentiel de l'aire, pour une attraction

qui procède suivant la puissance p de la distance

$$\frac{\pi A^{\frac{p+3}{n}}}{(p+3)^2 2^{\frac{p-n+3}{n}}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{p+3}{2n}\right)},$$

et, enfin, le potentiel de l'arc pour cette même loi générale d'attraction, en supposant, en outre, que sa densité varie comme la puissance q de la distance

$$\frac{A^{\frac{p+q+2}{n}}}{n 2^{\frac{2n-p-q-2}{n}}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{p+q+2}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{n}\right)}.$$

On aurait notamment pour $q = n - 1$ le potentiel de la courbure (15 et 13) (Haton de la Goupillière).

35. Courbe la plus générale qui rende maximum l'intégrale

$$\int \rho^{-n-1} ds$$

(Euler, *Methodus inveniendi*, p. 53).

36. Courbe d'équilibre d'une chaînette *homogène*, sollicitée par des forces centrales en raison inverse de la puissance $n + 2$ de la distance (O. Bonnet, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. IX, p. 229).

37. Courbe d'équilibre d'une chaînette *d'égale résistance*, pour des forces centrales inversement proportionnelles à la distance, la tension de la chaîne par unité de section transversale étant $n - 1$ (O. Bonnet, *ibid.*, p. 99).

38. Si l'on tend en ligne droite cette dernière chaînette, en lui attribuant la forme d'un corps homogène de

révolution, sa courbe méridienne sera précisément la roulette du centre d'une ligne du même groupe roulant sur une droite (O. Bonnet, *ibid.*, *voir* ci-dessus n° 28).

39. Si une courbe (1) est parcourue librement par un mobile suivant la loi des aires, la force totale qui émane du pôle varie en raison inverse de la puissance $2n+3$ de la distance (Maclaurin, *Philosophical Transactions*, p. 809, année 1708).

40. Courbe la plus générale, telle que, si elle est parcourue suivant la loi des aires, la vitesse linéaire varie à chaque instant en raison inverse de la puissance $n+1$ de la distance (Riccati, *Commentarii Bonon.*, t. IV, p. 184).

41. La force centripète varie alors en raison inverse de la puissance $n+3$ de la distance (à démontrer).

42. Les forces centrales, pour lesquelles la courbe (1) est brachistochrone, procèdent suivant la puissance $2n+1$ de la distance (Haton de la Goupillière).

43. Le réseau isotherme algébrique de n nœuds, qui en admet la plus grande condensation possible, c'est-à-dire une étoile unique de l'ordre n, est formé d'une famille homothétique de courbes (1) de l'ordre $-n$, et de la même tournée de l'angle $\frac{\pi}{2n}$ (Haton de la Goupillière, *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVIIIe Cahier, p. 101).

44. Dans un réseau isotherme algébrique *quelconque* de degré n, le système des enveloppes des directions principales de l'avant-dernier ordre $n-1$ est formé de $n-1$

familles homothétiques de courbes (1) de l'ordre $\frac{n}{1-n}$, disposées régulièrement autour du centre du réseau.

Il en est de même pour les directions suivant lesquelles le $(n-1)^{ième}$ incrément s'annule au lieu d'être maximum comme sur les précédentes (HATON DE LA GOUPILLIÈRE, *ibid.*, p. 108).

QUADRILATÈRES ET SECTIONS CONIQUES;

PAR M. PAUL TERRIER,
Ingénieur à Paris.

[SUITE (*).]

THÉORÈME XXVI. — *Si l'on désigne par* λ, μ, ρ *les sommets du* triangle des alignements *d'un quadrilatère quelconque* (*voir* théorème VII); *par* K, H, L *les sommets homologues du triangle diagonal; par* x, u, v *les intersections des côtés homologues des deux triangles sur l'axe d'homologie, on a, entre les douze segments de droites qui joignent les six sommets aux trois intersections, la relation*

$$\frac{xL \times x\rho}{uL \times u\rho} \times \frac{uK \times u\lambda}{vK \times v\lambda} \times \frac{vH \times v\mu}{xH \times x\mu} = 1.$$

Cette relation est de même forme que celle donnée par Carnot, dans le cas d'un triangle coupé par une conique.

THÉORÈME XXVII. — *Si, de chacun des quatre sommets d'un quadrilatère simple quelconque* A, *on abaisse des perpendiculaires sur la diagonale et sur les deux côtés qui ne passent pas par le sommet considéré :*

1° *Les pieds de ces perpendiculaires, prises par*

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 514.

groupes de trois, issues d'un même sommet, déterminent quatre triangles semblables

2° *Les circonférences circonscrites à ces quatre triangles ont une intersection commune* δ.

3° *Leurs secondes intersections deux à deux, au nombre de six, sont situées sur les quatre côtés et sur les deux diagonales du quadrilatère* A, *aux points mêmes où ces six droites, considérées comme diagonales de l'un des trois quadrilatères qui ont les quatre sommets donnés de* A, *recoivent les* concours *fournis par les diagonales respectivement correspondantes.*

4° *Ces secondes intersections sont les six centres d'homologie deux à deux des quatre triangles semblables* (1°) *fournis par les quatre sommets du quadrilatère* A.

5° *Les deux droites qui joignent les concours fournis par chaque diagonale sur l'autre et sur l'axe radical se coupent au point* δ.

6° *Les centres des circonférences circonscrites aux quatre triangles semblables sont les sommets d'un second quadrilatère* A_1, *semblable au quadrilatère donné* A.

7° *Les diagonales de ce second quadrilatère se coupent sur la médiane du premier.*

Théorème XXVIII. — *Si, par le point de rencontre des diagonales intérieures du second quadrilatère* A_1, *on décrit une circonférence passant par le point de commune intersection* δ (théorème précédent), *cette nouvelle circonférence passe aussi :*

1° *Par le point d'intersection des diagonales intérieures de* A;

2° *Par les extrémités de la corde commune aux circonférences décrites sur les diagonales de* A *comme diamètres ;*

3° *Par les* concours *que les diagonales intérieures de* A *fournissent réciproquement l'une sur l'autre :*

4° *Par le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère formé par la droite qui joint ces deux* concours *et par les trois diagonales de* A.

Les deux couples de quadrilatères croisés, ayant mêmes sommets que les quadrilatères simples A et A_1, donnent des résultats analogues, d'où l'on déduit les conséquences suivantes :

Corollaires. — 1° Les deux circonférences ayant leurs centres aux sommets extérieurs de A_1 et passant au point δ passent aussi, respectivement, aux sommets extérieurs homologues de A, et coupent les couples de côtés opposés qui déterminent ces sommets aux mêmes points que les secondes intersections deux à deux des quatre circonférences précédemment considérées (théorème XXVII, 2° et 3°);

2° Les sept circonférences ayant leurs centres aux six sommets et au point d'intersection des diagonales intérieures de A_1, et passant par le point δ, se coupent trois à trois sur les quatre côtés et sur les diagonales intérieures de A, aux points où ces six droites, prises comme diagonales de l'un des trois quadrilatères ayant mêmes sommets que A, reçoivent respectivement le concours de la diagonale correspondante.

Définitions. — Nous appelons *cercle radical* du quadrilatère A le cercle qui a son centre à l'intersection des diagonales de A_1 et qui passe par les sept points remarquables déterminés au théorème précédent.

Chacune des quatre circonférences (théorème XXVII, 2°) d'intersection commune δ sur le *cercle radical* a même diamètre qu'une conique dont l'un des foyers est au sommet correspondant du quadrilatère A. Dans le cas limite du quadrilatère inscrit, les quatre coniques sont

des paraboles et les quatre circonférences se réduisent aux *quatre droites de Simson*, d'intersection commune (théorème XIV) sur l'axe radical. Le *cercle radical* a son centre à l'infini, sur la médiane du quadrilatère donné, et se confond avec l'axe radical. Cet axe est donc, dans le quadrilatère inscrit, une position particulière du cercle radical, et le centre perspectif α, dans le même cas, est une position particulière du point d'intersection δ, qu'on peut appeler par extension *centre perspectif* du quadrilatère quelconque.

On voit d'ailleurs que la propriété connue du quadrilatère inscrit, à savoir que les diagonales intérieures se coupent sur l'axe radical, est le cas particulier d'une propriété plus générale du quadrilatère quelconque, puisque les diagonales de ce quadrilatère se coupent sur son cercle radical.

Nous rappelons la propriété suivante, énoncée sous une autre forme par Steiner :

Les centres des circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par quatre droites, prises trois à trois, sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible dans une circonférence qui passe par le foyer de la parabole tangente aux quatre droites.

Théorème XXIX. — *Les côtés et les diagonales du quadrilatère des centres coupent respectivement à angles droits, et en leurs milieux, les droites qui joignent les six sommets du quadrilatère formé par les quatre droites données au foyer de la parabole inscrite à ce quadrilatère.*

Corollaires. — 1° Les pieds des perpendiculaires abaissées du foyer de la parabole sur les côtés, et diagonales du quadrilatère des centres, sont les six sommets d'un quadrilatère homothétique du quadrilatère donné

(rapport = $\frac{1}{2}$). Le centre d'homothétie est au foyer de la parabole.

2° Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par les sommets trois à trois du quadrilatère des centres, et les centres perspectifs des quatre quadrilatères inscriptibles formés par les côtés trois à trois du quadrilatère donné et par le foyer de la parabole inscrite, pris comme quatrième sommet commun, se confondent deux à deux sur la directrice de la parabole.

Théorème XXX. — *Les centres des circonférences circonscrites aux triangles formés par les côtés d'un quadrilatère* inscriptible, *pris trois à trois, sont les sommets d'un trapèze isoscèle inscrit dans une circonférence qui passe par le foyer de la parabole inscrite et par le centre de la circonférence circonscrite au quadrilatère donné.*

Le quadrilatère des centres est un rectangle lorsque l'une des diagonales du quadrilatère inscriptible passe par le centre du cercle circonscrit.

Théorème XXXI. — *Les deux circonférences circonscrites, l'une au quadrilatère donné, l'autre au trapèze des centres, ont pour corde commune un segment de l'axe radical du quadrilatère donné.*

Théorème XXXII. — *La droite* (perpendiculaire à la diagonale extérieure) *qui joint le foyer de la parabole inscrite au centre du cercle circonscrit, est l'axe radical de deux circonférences qui ont respectivement leurs centres à l'intersection des diagonales et à l'intersection des côtés non parallèles du trapèze des centres, et dont chacune passe par les extrémités d'une diagonale du quadrilatère donné.*

L'axe radical du quadrilatère et celui des circonfé-

rences considérées ont même intersection que les diagonales du quadrilatère.

Théorème XXXIII. — *Le point de rencontre des hauteurs du triangle qui a pour sommets les centres des circonférences circonscrites à trois des quatre triangles formés par quatre droites, prises trois à trois, est situé sur celle des quatre droites qui entre comme côté dans les trois triangles considérés.*

Théorème XXXIV. — *Les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par deux côtés adjacents et une diagonale du quadrilatère des centres* A_1, *d'un quadrilatère donné* A, *sont les sommets d'un troisième quadrilatère* A_2, *égal et symétrique de* A_1 (propriété connue), *et de plus inscrit dans le quadrilatère donné* A.

Théorème XXXV. — *Deux sommets quelconques de* A_1, *les deux sommets antihomologues de* A_2 *et le sommet de* A, *déterminé par les côtés passant aux sommets considérés de* A_2, *sont cinq points situés sur un cercle égal aux cercles circonscrits à* A_1 *et à* A_2.

Corollaire. — Les sommets de A_1, pris deux à deux, donnent six combinaisons et déterminent six cercles égaux, dont chacun passe par l'un des sommets de A.

Les centres des quatre cercles déterminés par deux sommets consécutifs de A_1 sont les sommets d'un parallélogramme dont les diagonales se coupent au *centre perspectif* commun aux quadrilatères A_1, A_2, et dont les côtés sont parallèles aux diagonales de ces quadrilatères.

Les centres des deux cercles déterminés par les couples de sommets opposés de A_1 sont symétriquement placés, par rapport au centre perspectif, sur une droite parallèle aux médianes de A_1 et de A_2.

Théorème XXXVI. — *Les quatre triangles formés*

par les côtés trois à trois de A, *et les quatre autres triangles respectivement inscrits aux premiers, formés par les quatre sommets trois à trois de* A_2, *sont semblables et homologiques deux à deux.*

Leurs quatre centres d'homologie sont situés sur la circonférence circonscrite au quadrilatère des centres.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES 3 A 3, QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES ; CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE ; APPLICATIONS ;

PAR M. A. VACHETTE.

I. *Permutations bonnes et permutations mauvaises; variétés d'une espèce, asymétriques, symétriques et réciproques.*

Soit $C_{q,3}$ le nombre des permutations bonnes; elles se trouvent parmi les $B_{q,3}$ et sont formées aussi avec des $T_{3(q-1)}$; en introduisant trois lettres égales dans celles de ces dernières qui y sont propices, elles ne peuvent venir ainsi que des $B_{q-1,3}$, puisque toute $M_{q-1}(r, t)$ s'y trouve impropre, deux lettres distinctes étant nécessaires pour fermer le binaire $\underline{aa}$, ou le ternaire $\underline{aaa}$.

Toutes les autres espèces de permutations sont mauvaises, à cause de certaines séquences de lettres, dites *intervalles*.

$$\underline{aba},\quad \underline{abab},\quad \underline{abaca},\quad \underline{abacacdcd},$$

où une lettre quelconque fait partie, comme *médiane* ou *extrême*, d'un intervalle ayant à chacune de ses extrémités la forme primordiale $\underline{aba}$, ce qui le rend indécomposable. Le nombre des permutations mauvaises

d'une certaine espèce sera désigné par $N_q(\alpha)$, q indiquant l'ordre, α servant d'indication pour le nombre et la nature des intervalles qui y figurent.

Toute $N_{q,3}$ est une tournante complète à $3q$ permutations : il y a cependant une exception; dans les $B_{2,3}$, il n'y a point de $C_{2,3}$, et l'on ne connaît que l'espèce $\underline{ab\ ab\ ab}$, tournante incomplète à deux permutations.

On a encore des *variétés asymétriques*, et des *variétés symétriques de fraction* $\frac{1}{x}$. Pour un nombre A de variétés asymétriques, on obtient, dans l'ordre q, $3q\,P_q.A$ permutations; pour un nombre A′ de variétés asymétriques de fractions $\frac{1}{x}$, $\frac{3q\,P_q}{x}$ A′. Les x portions égales de la permutation qui font la symétrie commencent, en général, pour les $N_{q,3}$, à des intervalles, et chacune d'elles contient au moins un intervalle où le nombre des lettres est $\geqslant 3$; comme il y a $3q$ lettres, on doit avoir $x \leqslant q$, et, par suite, x est toujours un diviseur de P_q.

Deux variétés d'une même espèce sont *réciproques* quand l'une se déduit de l'autre, en la renversant bout pour bout. Elles sont, en général, différentes. Ainsi

$$\underline{aba}\ de\underline{af\ bc}bc\ efcdfecd, \quad dcefdcfe\ \underline{cbcb}\ faed\underline{aba}$$

sont deux variétés réciproques distinctes; mais

$$\underline{aba}\ cde\ cde\ cde\ \underline{bab}\ fgh\,fgh\,fgh$$

est à elle-même sa réciproque; le fait a toujours lieu pour les variétés symétriques.

La réciprocité permet d'abréger la recherche directe du nombre des permutations d'une espèce déterminée : quand deux variétés sont réciproques, on retrouve de droite à gauche dans la seconde ce qu'on avait trouvé de gauche à droite dans la première. Après avoir trouvé

toutes les variétés possibles dans un sens, on en doublera le nombre; mais il faudra bien s'assurer si quelques-unes des variétés trouvées ne sont pas à elles-mêmes leurs réciproques, ce qu'on verra mieux sur les exemples.

II. *Des intervalles.*

1° L'intervalle est simple ou composé, selon qu'il contient deux ou plus de deux lettres distinctes.

Il n'y a que quatre intervalles simples

$$\underline{aba},\quad \underline{abab},\quad \underline{ababa},\quad \underline{ababab},$$

désignés respectivement par

$$s_3,\quad s_4,\quad s_5,\quad s_6.$$

Dans s_3, $\underline{aba}$, b est *médiane* et *a extrême;* dans s_4, $\underline{abab}$, il y a deux médianes et deux extrêmes; dans s_5, $\underline{ababa}$, deux médianes, deux extrêmes, et la *lettre moyenne a*; dans s_6, $\underline{ababab}$, deux extrêmes, deux médianes et deux lettres moyennes.

L'intervalle composé présente nécessairement des *suites tridifférentes* de trois lettres distinctes consécutives *abc*, *cab*,..., intérieures à l'intervalle, commençant au plutôt à la deuxième lettre, au plus tard à la troisième, à droite et à gauche :

$$\underline{abacacbc},\quad \underline{ababcbc},\quad \underline{abacacdcd},\quad \underline{ababcbcac},$$

la forme $\underline{ababa}$ ne pouvant devenir plus complexe que par la juxtaposition de b. La suite tridifférente est de *second rang* ou de *troisième rang*, selon qu'elle commence à la deuxième ou à la troisième lettre de l'intervalle composé, qu'on peut nommer intervalle de *second* ou de *troisième rang*.

Quand il y a, dans l'intervalle, plusieurs *tridifférences* consécutives, les deux dernières lettres d'une suite sont par ordre les deux premières de la consécutive; $\underline{ab\,abc\ldots}$ entraîne $\underline{ab\,abc\,bc\ldots}$, si l'on veut avoir un intervalle plus complexe, contenant plusieurs tridifférences.

2° L'intervalle est *réductible* ou *irréductible,* quand on peut ou non en détacher $3r$ lettres égales trois à trois, sans altérer la forme du reste de la permutation. Ainsi

$$\underline{ab\,abc\,bcd\,cde\,de}$$

peut, en détachant trois c et trois d, se réduire à

$$\underline{ab\,abe\,be};$$

les lettres a e extrêmes demeurent toujours à la même distance de leurs semblables, situées en dehors de l'intervalle, et il n'y a pas lieu de se préoccuper de la lettre b, qui entre trois fois dans l'intervalle. Au contraire

$$\underline{ab\,abc\,bc}$$

est irréductible; car, si l'on enlève les trois b, on obtient $\underline{a\,a\,c\,c}$, qui ne se rencontre jamais dans les $B_{q,3}$. Il en est de même de $\underline{a\,b\,a\,c\,a}$; car, si l'on enlève les a, on obtient $\underline{b\,c}$ qui peut se rattacher aux autres b et c que contient la permutation, pour déterminer des intervalles la distance entre les lettres pareilles, b et c ayant nécessairement changé.

La réduction d'un intervalle permet, en général, d'abaisser de r unités l'ordre d'une permutation, sans augmenter ni diminuer le nombre de ses intervalles, et sans changer le nombre des variétés de l'espèce considérée.

Les quatre intervalles simples sont irréductibles.

Il y a trois intervalles composés irréductibles; ils ne

contiennent qu'une seule tridifférence,

$$\underline{a\,bac\,a} \left\{ \frac{a\,bac\,ac}{ca\,cab\,a} \right\} \text{ formes réciproques } \underline{ab\,abc\,bc},$$

désignées respectivement par

$$p_5, \quad p_6, \quad p_7.$$

Dans le p_5, *abaca*, il y a deux extrêmes, une lettre moyenne et deux médianes b et c; dans le p_6, $\left.\frac{a\,bac\,ac}{ca\,cab\,a}\right\}$, une médiane b, une lettre double c, et une lettre triple a; dans le p_7, *ab abc bc*, deux extrêmes, deux médianes a et c, et une lettre triple b qui joue le rôle de moyenne et de médiane.

3° Plusieurs intervalles sont *complémentaires* quand ils contiennent exclusivement $3r$ lettres égales trois à trois, *aba* et *bab*, *ab aca* et *bc bc*, *ab abc b* et *ca c* donnent des exemples de deux intervalles complémentaires; *ab a*, *bc b*, *ca c* donnent un exemple de trois intervalles complémentaires.

III. *Classification des intervalles réductibles.*

Ils se divisent en cinq classes ayant pour types les trois intervalles composés irréductibles p_5, p_6, p_7 et deux des intervalles simples s_5, s_6.

1° Classe de type s_5.

Un intervalle de cette classe, désigné par t_{3r-1}, contient $3r - 1$ lettres, dont r distinctes; $3(r - 1)$ lettres y sont égales trois à trois, et la dernière lettre distincte entre deux fois

a bac acd cdb d.

Il se réduit à son type s_5 *ababa*, en éliminant $r - 2$ des r lettres distinctes prises parmi celles qui y entrent trois

fois ; la même lettre b commence et finit les tridifférences, et cette lettre, comme dans s_5, est médiane du t_{3r-1}.

2° Classe de type s_6.

Un intervalle de cette classe, désigné par t_{3r}, contient $3r$ lettres égales trois à trois, et est susceptible de deux formes réciproques

$$\underline{a\ bac\ acd\ cdb\ db},$$

$$\underline{bd\ bdc\ dca\ cab\ a}.$$

Il se réduit à son type s_6, $\underline{ababab}$, en éliminant $r-2$ des r lettres distinctes ; la même lettre commence et finit les tridifférences, mais son type n'est susceptible que d'une seule forme, qui est elle-même sa réciproque.

Il peut à lui seul faire une permutation d'ordre q, si $r=q$; l'espèce de la permutation est désignée alors par $N_q(t_{3q})$.

3° Classe de type p_5.

Un intervalle de cette classe, désigné par t'_{3r-1} contient $3r-1$ lettres, dont $r+1$ distinctes ; $3(r-1)$ lettres y sont égales trois à trois, et chacune des deux autres lettres distinctes n'entre qu'une fois

$$\underline{a\ bac\ acd\ cde\ d}.$$

Il se réduit à son type p_5, $\underline{abaca}$, en éliminant $r-2$ des $r+1$ lettres distinctes, prises parmi les $r+1$ lettres qui y entrent trois fois ; les deux lettres simples b, e (n'entrant qu'une fois) commencent et finissent les tridifférences ; elles seront, comme dans p_5, les médianes de t'_{3r-1}.

4° Classe de type p_6.

Un intervalle de cette classe, désigné par t'_{3r}, contient $3r$ lettres, dont $r+1$ distinctes ; $3(r-1)$ lettres y sont égales trois à trois ; l'une des deux autres lettres

distinctes entre deux fois, et la dernière une fois; il est, comme son type, susceptible de deux formes réciproques

$$\underline{a\ bac\ acd\ cde\ de}\,,$$
$$\underline{ed\ edc\ dca\ cab\ a}\,,$$

il se réduit à son type p_6, $\dfrac{a\ bac\ ac}{\underline{ca\ cab\ a}}$, en éliminant $r-2$ des $r+1$ lettres distinctes, prises parmi les $r-1$ lettres qui y entrent trois fois: les deux autres lettres distinctes b, e commencent et finissent les tridifférences; b sera, comme dans p_6, la médiane du t'_{3r}; e sera sa lettre double.

5° Classe de type p_7.

Un intervalle de cette classe, désigné par t_{3r-2} contient $3r-2$ lettres, dont r distinctes; $3(r-2)$ lettres y sont égales 3 à 3 et chacune des deux autres lettres distinctes entre deux fois

$$\underline{ab\ abc\ bcd\ cde\ de}\,.$$

Il se réduit à son type p_7, $\underline{ab\ abc\ bc}$, en éliminant $r-3$ des r lettres distinctes, prises parmi les $r-2$ lettres qui y entrent trois fois; les deux autres lettres distinctes a, e commencent et finissent les tridifférences; elles seront, comme dans p_5, les extrêmes et les médianes du t_{3r-2}.

IV. *Évaluation directe des nombres de quelques espèces de permutations.*

1° Dans l'ordre 2, les $B_{2,3}$ ne contiennent que l'espèce $N_2(s_6)$

$$\underline{ab\ ab\ ab}\,,$$

et l'on voit que $N_2(s_6)=2$.

Il n'y a qu'une variété, et un seul intervalle compose toute la permutation. Cette variété est symétrique de

fraction $\frac{1}{x}$, et l'on a (I)

$$\frac{3qP_q}{x}\,1 = N_2(s_6).$$

Comme $N_2(s_6) = 2$, $q = 2$, on en déduit

$$\frac{12}{x} = 2, \quad \text{d'où} \quad x = 6,$$

et l'on considérera cette variété comme symétrique de fraction $\frac{1}{6}$.

2° Dans l'ordre q, l'espèce $N_q(t_{3q})$ ne contient qu'un intervalle t_{3q}, qui compose toute la permutation ; il peut s'écrire sous la forme d'une suite de q tridifférences

abc bcd cde dea eab,

et l'on a une variété symétrique de fraction $\frac{1}{q}$: donc

$$\frac{q}{3qP_q} N_q(t_{3q}) = 1,$$

d'où

$$N_q(t_{3q}) = 3P_q.$$

Pour $q = 3$,

$$N_3(t_9) = 3P_3.$$

3° Les espèces $N_q(t'_{3q-4}, s_4)$ et $N_q(t_{3q-5}, p_5)$ n'offrent chacune qu'une variété asymétrique ; les deux intervalles, qui forment à eux deux la permutation, sont complémentaires,

a bac acd cde bebe, *ab abc bcd cde de fafef*

On en conclut les deux formules

$$N_q(t'_{3q-4}, s_4) = 3qP_q, \quad N_q(t_{3q-5}, p_5) = 3qP_q.$$

En particulier, pour $q = 3$, on aura

$$N_3(p_5, s_4) = 9P_3.$$

V. *Permutations d'ordre* $q-1$, *que peuvent former des* $C_{q,3}$, *quand on y introduit un nouveau groupe de trois lettres pareilles.*

1° On sait que les $C_{q,3}$ ne peuvent venir que des $B_{q-1,3}$, mais non de toutes leurs espèces.

Toutes les $C_{q-1,3}$ en fourniront.

Pour en fournir, une $N_{q-1,3}$ ne doit pas contenir plus de trois intervalles, puisqu'il faut au moins une lettre h pour fermer un s_3, $\underline{aba}$ le plus simple des intervalles.

2° Toute $N_{q-1,3}$ à un intervalle peut contenir un des sept intervalles irréductibles, et un seul intervalle de chacune des cinq classes d'intervalles irréductibles, celui qui ne présente que deux tridifférences; s'il en a trois, comme

$$\underline{a\ bac\ acb\ cdb\ db},$$

il ne peut être fermé complétement par trois lettres h.

On devra recourir aux douze espèces

$$N_{q-1}(s_3),\quad N_{q-1}(s_4),\quad N_{q-1}(s_5),\quad N_{q-1}(s_6),$$
$$N_{q-1}(p_5),\quad N_{q-1}(p_6),\quad N_{q-1}(p_7),$$
$$N_{q-1}(t_9),\quad N_{q-1}(t_8),\quad N_{q-1}(t'_8),\quad N_{q-1}(t'_9),\quad N_{q-1}(t_{10}).$$

Un s_3 est fermé avec h de deux manières; $\underline{aba}$ donne

$$ab\,\underline{h}\,a,\quad a\,\underline{h}\,ba.$$

Un s_4, de deux manières avec un h ou deux h; $\underline{abab}$ donne

$$ab\,\underline{h}\,ab,\quad a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,b.$$

Un s_5, de deux manières avec deux h; $\underline{ababa}$ donne

$$a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,ba,\quad ab\,\underline{h}\,ab\,\underline{h}\,a.$$

Un s_6, de deux manières avec deux h ou trois h; $\underline{ababab}$ donne

$$ab\,\underline{h}\,ab\,\underline{h}\,ab,\quad a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,b;$$

la seconde manière est seule admissible, si la permutation ne contient que s_6.

Un p_5, de trois manières avec deux h; $\underline{abaca}$ donne

$$a\,\underline{h}\,bac\,\underline{h}\,a,\quad a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,ca,\quad ab\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,a.$$

Un p_6 (quelle que soit sa forme), de deux manières avec deux h et d'une avec trois h; ainsi $\underline{a\,bac\,ac}$ donne

$$a\,\underline{h}\,bac\,\underline{h}\,ac,\quad ab\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,ac,\quad a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,ca\,\underline{h}\,c.$$

Un p_7, de trois manières, une avec deux h et deux avec trois h: $\underline{ab\,abc\,bc}$ donne

$$ab\,\underline{h}\,abc\,\underline{h}\,bc,\quad a\,\underline{h}\,ba\,\underline{h}\,bc\,\underline{h}\,bc,\quad ab\,\underline{h}\,ab\,\underline{h}\,cb\,\underline{h}\,c.$$

Un t_{10}, d'une manière avec trois h; $\underline{ab\,abc\,bcd\,cd}$ donne

$$ab\,\underline{h}\,abc\,\underline{h}\,bcd\,\underline{h}\,cd.$$

Un t_9 ou un t'_9 (quelle que soit sa forme), de deux manières avec trois h; $\underline{a\,bac\,acb\,cb}$ donne

$$a\,\underline{h}\,bac\,\underline{h}\,acb\,\underline{h}\,cb,\quad ab\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,acb\,\underline{h}\,cb;$$

mais pour le t_9 la première manière est seule admissible, s'il forme à lui seul la permutation.

Un t_8 ou un t'_8, de quatre manières avec trois h; $\underline{a\,bac\,acb\,c}$ donne

$$a\,\underline{h}\,bac\,\underline{h}\,acb\,\underline{h}\,c,\quad a\,\underline{h}\,bac\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,bc,\quad ab\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,acb\,\underline{h}\,c,$$
$$ab\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,ac\,\underline{h}\,bc.$$

3° Une $N_{q-1.3}$, à deux intervalles, doit contenir au

moins un s_3 ou un s_4, les seuls qui puissent se fermer avec un h; le second intervalle ne peut être que l'un des sept intervalles réductibles.

On devra recourir aux treize espèces suivantes :

$N_{q-1}(2s_3)$, $N_{q-1}(s_4, s_3)$, $N_{q-1}(s_5, s_3)$, $N_{q-1}(s_6, s_3)$,
$N_{q-1}(p_5, s_3)$, $N_{q-1}(p_6, s_3)$, $N_{q-1}(p_7, s_3)$,
$N_{q-1}(2s_4)$, $N_{q-1}(s_5, s_4)$, $N_{q-1}(s_6, s_4)$, $N_{q-1}(p_5, s_4)$.
$N_{q-1}(p_6, s_4)$, $N_{q-1}(p_7, s_4)$.

4° Une $N_{q-1,3}$, à trois intervalles, ne peut contenir que des s_3 et des s_4.

On devra recourir aux quatre espèces suivantes :

$N_{q-1}(3s_3)$, $N_{q-1}(2s_3, s_4)$, $N_{q-1}(s_3, 2s_4)$, $N_{q-1}(3s_4)$.

Le nombre $C_{q,3}$ sera la somme des parts qui lui sont fournies par les trente espèces de permutations que nous venons de distinguer et de désigner.

VI. *Part donnée par les* $C_{q-1,3}$.

Soit une $C_{q-1,3}$ contenant $3q-3$ lettres égales trois à trois; si l'on y introduit les trois h, il y aura trois q places occupées, qu'on peut supposer numérotées de 1 à $3q$, et la permutation formée doit être une $C_{q,3}$.

Les plus forts numéros que puissent avoir simultanément les trois h sont $3q$, $3q-3$ et $3q-6$.

Pour le numéro 1 donné au premier h, le plus fort numéro du troisième h est $3q-2$. Si l'on donne au deuxième h le numéro 4, le troisième peut avoir un des $3q-8$ numéros compris entre 7 et $3q-2$ inclusivement; si l'on donne au deuxième le numéro 5, le troisième peut en avoir $3q-9,\ldots$; si l'on donne au deuxième le numéro $3q-5$, le troisième ne peut en avoir que 1. Ainsi, pour le numéro 1 donné au premier h, le nombre

des systèmes de places occupées par les deux autres est

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (3q - 8) = \frac{(3q-7)(3q-8)}{2}.$$

Il en sera de même pour les numéros 2 et 3 attribués au premier h; de sorte que, pour ces trois numéros donnés au premier h, on a un nombre de systèmes égal à

$$\frac{3(3q-7)(3q-8)}{2}.$$

Si le premier h a le numéro 4, chacun des deux autres prend un numéro de moins; il faut diminuer de 1 chacun des facteurs du numérateur de la fraction $\frac{(3q-7)(3q-8)}{2}$, et l'on a un nombre de systèmes égal à

$$\frac{(3q-8)(3q-9)}{2}.$$

S'il a le numéro 5, ce nombre est

$$\frac{(3q-9)(3q-10)}{2},$$

et ainsi de suite.

S'il a le numéro $3q - 6$, on en a 1 ou

$$\frac{2.1}{2}.$$

Le nombre des systèmes fournis ainsi par une $C_{q-1,3}$ aux $C_{q,3}$ est la somme

$$\begin{aligned} &\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \ldots \\ &\quad + \frac{(3q-9)(3q-8)}{2} + \frac{3(q-7)(3q-8)}{2} \\ &\qquad = \frac{(3q-9)(3q-8)(3q-7)}{6} + \frac{3(3q-7)(3q-8)}{2} \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}q(3q-7)(3q-8), \end{aligned}$$

en s'appuyant sur la formule connue de la somme des nombres triangulaires

$$\frac{1.2}{2}+\frac{2.3}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

La part cherchée sera donc

$$\tfrac{1}{2}q(3q-7)(3q-8)C_{q-1,3}.$$

(*A suivre.*)

NOTE SUR LES COURBES PLANES D'ORDRE n A POINT MULTIPLE D'ORDRE $n-1$;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Dans une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXX, séance du 26 avril 1875), j'ai donné un mode de génération des courbes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$. A la séance suivante, M. G. Fouret a présenté quelques observations sur ce mode de génération, et l'a modifié d'une manière heureuse.

On peut déduire très-simplement le résultat dont il s'agit ici, du théorème suivant, dû à Newton :

Quand une courbe a autant d'asymptotes (réelles) qu'il y a d'unités dans le degré de son équation, sous quelque direction qu'on tire une transversale, le centre des moyennes distances des points où elle rencontre les asymptotes est le même que celui des points où elle rencontre la courbe.

On peut, en le modifiant légèrement, étendre cet énoncé au cas où toutes les asymptotes ne sont pas réelles. En effet, il y a une infinité d'ellipses admettant deux

asymptotes imaginaires conjuguées ; considérons-en une : une transversale intercepte sur cette ellipse, à partir d'un point arbitraire, deux segments dont la somme algébrique est la même que celle des segments imaginaires conjugués, déterminés par les deux asymptotes ; ces dernières pourront donc être remplacées par l'ellipse considérée.

Cela étant, considérons une courbe d'ordre n ayant en un point O un point multiple d'ordre $n-1$, et supposons qu'elle ait 2μ asymptotes imaginaires et $n-2\mu$ asymptotes réelles. On peut déterminer μ ellipses passant par O et ayant respectivement pour asymptotes imaginaires les μ systèmes de deux asymptotes conjuguées de la courbe. Si l'on mène une transversale par le point O, et que l'on cherche le centre M des moyennes distances des points de rencontre de cette transversale avec les μ ellipses et les $n-2\mu$ asymptotes réelles (le point O étant compté comme μ points), ce centre sera le même que celui des points de rencontre de la transversale et de la courbe ; or il y a $n-1$ points de rencontre confondus en O ; on en déduit immédiatement que la somme algébrique des rayons vecteurs, comptés à partir de O, des $n-2\mu$ asymptotes réelles et des μ ellipses est égale au rayon vecteur de la courbe unicursale proposée.

SUR UN THÉORÈME DE JACQUES BERNOULLI ;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

L'énoncé du théorème de J. Bernoulli, dont M. H. Brocard a donné une démonstration dans le numéro de juillet dernier, a été donné par Jacques Bernoulli, non-seulement pour le cône droit, mais aussi pour le cône

oblique à base circulaire. En voici l'énoncé que je transcris de l'*Aperçu historique :*

Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée, ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre sera le latus rectum *de la conique.*

Voici une démonstration du théorème relatif au cône oblique :

Soit SAB le *triangle par l'axe* (*), c'est-à-dire la section du cône par le plan mené suivant la droite qui joint le sommet au centre de la base, et perpendiculaire au plan de la base ; soient, en outre, EF la trace du plan sécant, sur le plan du triangle par l'axe, auquel il est supposé perpendiculaire, et CD la trace d'un plan parallèle à la base et à la même distance du sommet que le plan sécant.

On voit, sans difficulté, que le *latus rectum* ou $\frac{2b^2}{a}$ est égal à

$$\frac{\text{EF}.\text{KC}.\text{KD}}{\text{KE}.\text{KF}},$$

K étant le point de rencontre de CD et EF ; il suffit de remarquer que les deux sections CD et EF ont une corde commune (réelle ou idéale). La question revient donc à prouver que

$$\text{CD} = \frac{\text{EF}.\text{KC}.\text{KD}}{\text{KE}.\text{KF}}.$$

Or, les deux triangles SCD, SEF, ayant même hauteur et un angle commun, on a

$$\frac{\text{CD}}{\text{EF}} = \frac{\text{SC}.\text{SD}}{\text{SE}.\text{SF}};$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

mais, si h désigne la hauteur commune,

$$SC = \frac{h}{\sin C}, \quad SD = \frac{h}{\sin D}, \quad SE = \frac{h}{\sin E}, \quad SF = \frac{h}{\sin F};$$

donc

$$\frac{SC.\ SD}{SE.\ SF} = \frac{\sin E}{\sin C} \times \frac{\sin F}{\sin D} = \frac{KC}{KE} \times \frac{KD}{KF}.$$

Le théorème est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Nouvelle Correspondance mathématique, rédigée par Eugène Catalan, ancien élève de l'École Polytechnique, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Liége, etc., avec la collaboration de MM. Mansion, Laisant, Brocard, Neuberg et Édouard Lucas. T. II. Janvier 1876. — Liége, Librairie polytechnique de E. Decq, 4, rue de la Régence.

Les articles destinés à la *Nouvelle Correspondance mathématique* doivent être adressés, *francs de port,* à M. Catalan, rue Nysten, 21 (Liége). Ils doivent être écrits lisiblement.

Les auteurs des Notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celles-ci sur des feuilles séparées.*

La Rédaction ne *renvoie pas* les manuscrits non insérés.

La *Nouvelle Correspondance mathématique* paraît tous les mois, en livraisons de deux ou trois feuilles.

Prix de l'abonnement. — Belgique, 10 francs; autres pays appartenant à l'Union postale, 12 francs. — Prix de chaque numéro de la *Nouvelle Correspondance,* 1 franc.

Les Ouvrages de Mathématiques dont on enverra un exemplaire au Rédacteur seront annoncés ou analysés dans le journal.

Sommaire du numéro de janvier 1876. — Sur les polygones

circonscrits à une conique; par M. Neuberg. — Note sur l'*Essai pour les coniques;* par M. Le Paige. — De la trisection de l'angle au moyen du compas; par M. Ed. Lucas. — Sur la théorie des transformations linéaires; par M. Mansion. — Sur un problème relatif aux courbes planes; par M. Laisant. — Sur les nombres polyédraux; par M. Charlier. — Sur un Mémoire de Libri.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Deel I (*), journal rédigé par M. le Dr D. Bierens de Haan, de l'Université de Leyde.

Ce journal paraît en deux livraisons semestrielles formant, chaque année, un volume d'environ 14 feuilles.

La première livraison de 1875 contient plusieurs articles très-intéressants, parmi lesquels nous avons particulièrement remarqué la théorie des *Quaternions* de M. *J. Versluys.*

Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias. Año 2°, num. 4°. Agosto 1875 (**).

Voici le sommaire de ce numéro, le seul que nous ayons reçu :

I. *La Enseñanza y la Politica,* por don Ramon Larroca.

II. *Demostracion de un teorema,* por D. Francisco Lizárraga, ingeniero de Caminos.

III. *Teoria de las operaciones financieras* (continuacion), por D.-V. de G. Pastor.

IV. *Solucion de las cuestiones propuestas.* Cuestion 7ª, por D. José Bartrina y Royo, catedrático de Matemáticas en el instituto de Albacete.

V. *De la naturaleza de la electricidad,* por el señor D.-E. Edlund. (Continuacion.)

VI. *Azul del cielo* (conclusion), por don Eduardo Lozano.

VII. *Arco iris singular,* por D.-M. Regil.

(*) Amsterdam, Weytingh et Brave (1875).

(**) Madrid. Imprenta A. Cargo de Gregorio Juste. Isabel la católica, n° 23, 2° (1875).

VIII. *Indicacion de algunas relaciones armónicas entre las diversas partes de las flores y el cumplimiento de la reproduccion sexual* (continuacion), por D. José de Arce.

IX. *Ojeada sobre los progresos de la Fisiologia vejetal en* 1874, por D. Márcos Micheli.

X. *Notas biográficas de* Luis-Agustin Cauchy y Nicolas-Enrique Abel, por D.-J. B. y R.

XI. *Cuestiones.*

Le premier article, intitulé : *La Enseñanza y la Politica* (l'Enseignement et la Politique), est une protestation des plus énergiques contre l'état d'abandon dans lequel l'enseignement est laissé en Espagne, depuis tant d'années, par les différents gouvernements qui sont venus diriger les destinées de ce pays : « politiques par excellence, ils n'ont jamais daigné porter leurs » regards sur la classe la plus respectable de la Société, sur le » corps le plus digne, le plus sacré, sur le Professorat. Ils l'ont » abandonné au hasard, aux caprices des Conseils des villes, » Députations et Corporations.... »

« Les Conseils des villes et les Députations, en général, se » rendent coupables du crime de lèse-nation en souffrant que » le vénérable maître d'école primaire, tout comme le docte » professeur d'Institut, soient souvent obligés d'avoir recours » à des personnes charitables qui leur donnent de quoi satis- » faire aux premières nécessités de la vie. C'est scandaleux, » immoral; c'est un crime dont le châtiment devrait être con- » signé dans nos codes. »

« Le tableau que présente l'enseignement ne saurait être plus » déplorable, plus affligeant, et cependant il n'y a pas une » main charitable qui cherche à le relever et à l'amener au port » du salut, quand le remède à ce grand mal est si facile, si peu » coûteux; mais nous ne devons pas nous attendre à ce que » cela arrive tant que le vénéneux virus de la politique exer- » cera son action corrosive depuis le Ministère de l'Instruction » jusqu'au plus microscopique Conseil du dernier coin de la » Péninsule. Dans une si triste situation, nous n'avons qu'à » nous résigner !... »

L'auteur de cet éloquent écrit est, par lui-même, une preuve qu'il y a encore du remède au mal qu'il déplore. On ne doit pas désespérer des destinées d'un pays où l'on trouve des hommes d'un patriotisme aussi éclairé. (G.)

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. C. Chadu,* professeur au Lycée de Mont-de-Marsan. — Voici quelques remarques sur la question 1143 : *Construire une parabole, connaissant le sommet, une tangente et un point.*

1° Le lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet commun et qui sont tangentes à une droite donnée est une parabole; cette parabole a pour sommet le sommet donné, et pour axe la perpendiculaire abaissée du sommet sur la tangente donnée.

2° Le lieu des foyers des paraboles qui ont un sommet commun et un point commun est une cissoïde qui a pour point de rebroussement le sommet donné.

Ces deux lieux se coupent en deux points qui sont les foyers des quatre paraboles satisfaisant à la question.

De ce qui précède, on peut déduire la proposition suivante, qu'il serait intéressant d'établir directement :

« Lorsque le sommet d'une parabole et le point de » rebroussement d'une cissoïde se confondent, ces deux » courbes se coupent en deux points qui sont les foyers » de quatre paraboles passant par un point donné et tan- » gentes à une droite donnée. »

2. *Extrait d'une lettre de M. Desboves.* — Dans les formules proposées à la fin du dernier volume, il y a quelques fautes d'impression.

Ligne 8, page 509, *au lieu de*

$$y_1 = \frac{4Rr''}{r'+r}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r'+r},$$

lisez

$$y_1 = \frac{4Rr''}{r'+r'''}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r'+r''}.$$

Ligne 18, *au lieu de*

$$x_1 \cos\frac{A}{2} = r', \quad \textit{lisez} \quad x_1 \cos^2\frac{A}{2} = r'.$$

Observation. — Outre les six cercles qui font l'objet des deux questions proposées, il y en a six autres, tangents aussi au cercle circonscrit au triangle et inscrits dans les six angles extérieurs 180 — A, 180 — B, 180 — C. Si, par exemple, on considère les deux cercles inscrits dans les deux angles égaux à 180° — A, et qu'on appelle x_2 et x'_2 les rayons de ces deux cercles, on a

$$x_2 \sin^2\frac{A}{2} = r'', \quad x'_2 \sin^2\frac{A}{2} = r'''.$$

Les trois dernières formules de la dernière question peuvent être remplacées par les trois suivantes, qui sont plus simples :

$$r' = \frac{4R+r}{4R+x_1}x_1, \quad r'' = \frac{4R+r}{4R+y_1}y_1, \quad r''' = \frac{4R+r}{4R+z_1}z_1,$$

et l'on peut ajouter à ces formules cette dernière :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{y_1} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{2R}.$$

3. M. Devin, élève en Mathématiques élémentaires au Lycée de Saint-Quentin, démontre très-exactement que, si deux bissectrices des angles d'un triangle sont égales entre elles, le triangle est isoscèle. La démonstra-

tion de M. Devin consiste à faire voir qu'on est conduit à une contradiction en admettant que les deux bissectrices sont égales, et les angles divisés inégaux; mais le théorème dont il s'agit ici a déjà été démontré deux fois dans les *Nouvelles Annales*.

Antérieurement, M. Demartres nous a communiqué une démonstration très-simple de cette proposition plus générale, que : au plus grand angle d'un triangle correspond la plus petite bissectrice. Voici la démonstration de M. Demartres :

Soient BF, CD les bissectrices des angles B, C d'un triangle ABC, dans lequel on suppose $B > C$. L'angle BFC, extérieur au triangle ABF, est égal à $\widehat{A} + \frac{\widehat{B}}{2}\cdot$ De même, $\widehat{BDC} = \widehat{A} + \frac{\widehat{C}}{2}$, d'où $BFC > BDC$. Il en résulte que, si l'on fait passer une circonférence par les trois points B, F, C, le point D sera extérieur au cercle et la droite CD rencontrera la circonférence en un point M, situé entre C, D, de sorte qu'on aura $CM < CD$; mais, à cause de l'inégalité $\frac{C}{2} < \frac{B}{2}$, on a arc $BM <$ arc CF, d'où arc $BMF <$ arc CFM; corde $BF <$ corde CM; et *a fortiori* $BF < CD$. Ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte évidemment de cette proposition que, si les bissectrices BF, ED sont égales, les angles B et C sont égaux.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1181

(voir 2e série, t. XIV, p. 384);

PAR M. L. BARBARIN,
Élève de l'École Normale supérieure.

Démontrer que l'on a

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots,$$

pourvu que la série soit convergente.

(H. LAURENT.)

La convergence a lieu évidemment quand $a, b, c, \ldots$ sont, par exemple, des nombres positifs qui vont en croissant, d'ailleurs en suivant une loi quelconque. Cela posé, je puis écrire

$$(1) \qquad \frac{a}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1};$$

de même

$$\frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{b+1}.$$

Je multiplie par $\frac{1}{a+1}$ les deux membres de cette dernière égalité, ce qui donne

$$(2) \qquad \frac{b}{(a+1)(b+1)} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)};$$

j'ai, par conséquent,

$$\frac{c}{(b+1)(c+1)} = \frac{1}{b+1} - \frac{1}{(b+1)(c+1)}.$$

Je multiplie encore les deux membres par $\frac{1}{a+1}$ et j'obtiens

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} \\ &\quad = \frac{1}{(a+1)(b+1)} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}, \end{aligned} \right.$$

et ainsi de suite; en général

$$\begin{aligned} &\frac{l}{(a+1)(b+1)\ldots(k+1)(l+1)} \\ &\quad = \frac{1}{(a+1)\ldots(k+1)} - \frac{1}{(a+1)\ldots(k+1)(l+1)}. \end{aligned}$$

En ajoutant toutes ces égalités, membre à membre, on obtient, après réduction,

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots \\ &\quad + \frac{l}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)} \\ &\quad = 1 - \frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)}; \end{aligned}$$

le quotient $\frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)}$ diminue de plus en plus, et tend vers la limite zéro, à mesure que les quantités $a, b, \ldots, l$ augmentent en nombre et en valeur; donc on a bien

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots.$$

Cas particuliers. — En donnant à $a, b, c, \ldots$ des valeurs particulières, on est conduit à des résultats remarquables dont je vais présenter quelques-uns.

Si l'on fait $a = b = c = \ldots = l$ dans la formule, il

vient

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a}{(a+1)^3} + \dots$$

ou

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \dots .$$

On retrouve ainsi ce fait connu que, N étant un nombre positif, supérieur à 1, la somme des puissances successives à exposants entiers de l'inverse de ce nombre a pour limite l'inverse du nombre qui lui est inférieur d'une unité

$$\frac{1}{N-1} = \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^3 + \dots .$$

Faisons maintenant

$$b = a+1, \quad c = b+1, \quad d = c+1, \dots;$$

il vient alors la formule

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{(a+1)(a+2)} + \frac{a+2}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots$$
$$+ \frac{a+n-1}{(a+1)\dots(a+n)} + \dots,$$

qui, pour $a = 0$, conduit à la série

$$1 = \frac{1}{1.2} + \frac{2}{1.2.3} + \frac{3}{1.2.3.4} + \dots + \frac{n-1}{1.2\dots n} + \dots .$$

Faisons maintenant

$$b = a+2, \quad c = b+2, \quad d = c+2, \quad \dots;$$

nous arrivons à la formule

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{a+2}{(a+1)(a+3)} + \frac{a+4}{(a+1)(a+3)(a+5)} + \dots$$

qui, pour $a = 0$, donne la série

$$1 = \frac{2}{1.3} + \frac{4}{1.3.5} + \frac{6}{1.3.5.7} + \ldots + \frac{2n}{1.4.5.7\ldots 2n+1} + \ldots,$$

et pour $a = 1$ la série

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2.4} + \frac{5}{2.4.6} + \frac{7}{2.4.6.8} + \ldots + \frac{2n-1}{2.4.6\ldots 2n} + \ldots.$$

On connaît enfin que chaque loi d'accroissement relatif aux quantités $a, b, c, \ldots$ donne lieu à une série convergente ayant l'unité pour limite.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Portail, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Louis Goulin, élève en Mathématiques spéciales au lycée Corneille à Rouen (classe de M. Vincent); E. Kruschwicthz, à Berlin; H. Delaperche, élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Emmanuel P.; de Virieu, professeur à Lyon; Moret-Blanc.

Question 1183

(voir 2e série, t. XIV, p. 288),

PAR M. MORET-BLANC.

Vérifier que

$$\begin{aligned}\sum a^2 \sum a'^2 \sum a''^2 = {} & [a\sum a'a'' + a'\sum aa'']^2 \\ & + [b\sum a'a'' + b'\sum aa'']^2 \\ & + [c\sum a'a'' + c'\sum aa'']^2 \\ & + [\sum (bc' - cb')a'']^2,\end{aligned}$$

les neuf quantités $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ *étant assujetties à la seule condition*

$$aa' + bb' + cc' = 0.$$

Cette identité donne, par exemple, la décomposition suivante :

$$(2^2+3^2+4^2)(4^2+4^2+5^2)(1^2+2^2+3^2)=74^2+71^2+112^2+9^2.$$

(CATALAN).

Ordonnons par rapport à a'', b'', c'' :

$$a\Sigma a'a'' + a'\Sigma aa'' = 2aa'a'' + (ab'+ba')b'' + (ac'+ca')c'',$$
$$b\Sigma a'a'' + b'\Sigma aa'' = (ab'+ba')a'' + 2bb'b'' + (bc'+cb')c'',$$
$$c\Sigma a'a'' + c'\Sigma aa'' = (ac'+ca')a'' + (bc'+cb')b'' + 2cc'c'',$$
$$\Sigma(bc'-cb')a'' = (bc'-cb')a'' + (ca'-ac')b'' + (ab'-ba')c''.$$

Le coefficient de a''^2 dans le second membre sera

$$4a^2a'^2 + (ab'+ba')^2 + (ac'+ca')^2 + (bc'-cb')^2$$

ou, en ajoutant,

$$b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2bb'cc' - a^2a'^2,$$

quantité identiquement nulle, en vertu de la condition donnée,

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2 + a^2c'^2$$
$$+ c^2a'^2 + b^2c'^2 + c^2b'^2 + [2aa'(aa'+bb'+cc') = 0]$$
$$= (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2).$$

Ce sera aussi, à cause de la symétrie, le coefficient de b''^2 et celui de c''^2.

Le coefficient de $a''b''$ est

$$4aa'(ab'+ba') + 4bb'(ab'+ba')$$
$$+ 2(ca'+ac')(bc'+cb') + 2(ca'-ac')(bc'-cb')$$
$$= 4(ab'+ba')(aa'+bb'+cc') = 0.$$

Les coefficients de $b''c''$ et $c''a''$ sont pareillement

$$4(bc'+cb')(aa'+bb'+cc') = 0,$$
$$4(ca'+ac')(aa'+bb'+cc') = 0.$$

Donc le second membre se réduit à

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(a''^2+b''^2+c''^2) = \Sigma a^2 \Sigma a'^2 \Sigma a''^2.$$

C. Q. F. D.

On a la décomposition indiquée en faisant

$$\begin{aligned} a &= 2, & b &= 3, & c &= 4, \\ a' &= 4, & b' &= 4, & c' &= -5, \\ a'' &= 1, & b'' &= 2, & c'' &= 3. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Pellissier et Félix Legrom.

Question 1186

(voir 2e série, t. XIV, p. 480);

PAR M. G. DE BEAUSÉJOUR,
Élève au collége Stanislas.

Trouver le lieu géométrique des centres des hyperboles équilatères, doublement tangentes à une parabole donnée, de telle sorte que la corde des contacts intercepte sur l'axe de la parabole, à partir de son sommet, une longueur qui soit moyenne proportionnelle entre les segments que cet axe détermine sur la corde elle-même. (GAMBEY.)

Supposons la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet; l'équation d'une hyperbole équilatère doublement tangente à la parabole sera

$$(1) \qquad y^2 - 2px - \left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda\right)^2 = 0.$$

La condition relative à la corde des contacts s'exprime facilement en fonction de l'angle α et du produit des ordonnées des points d'intersection de la corde des contacts et de la parabole.

L'équation qui détermine les ordonnées de ces deux

points est

(2) $$y^2 - 2p\left(\frac{\lambda - y\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = 0;$$

donc

$$\frac{\lambda^2}{\cos^2\alpha} = \frac{2p\lambda}{\cos\alpha\cos^2\alpha}\ (^*),$$

d'où

(3) $$\lambda\cos\alpha = 2p.$$

On aura l'équation du lieu cherché en éliminant λ et α entre l'équation (3) et les deux dérivées de l'équation (1) de l'hyperbole. Ces dérivées sont

$$p + \cos\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda) = 0,$$
$$y - \sin\alpha(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \lambda) = 0.$$

On en déduit

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{y}{p} \quad \text{et} \quad (x+p)\cos\alpha = \lambda$$

et par suite

$$\cos^2\alpha = \frac{p^2}{y^2+p^2}, \quad (x+p)\cos^2\alpha = \lambda\cos\alpha = 2p;$$

d'où

$$\frac{p^2}{y^2+p^2} = \frac{2p}{x+p} \quad \text{et} \quad y^2 = \frac{p}{2}(x-p).$$

(*) En désignant par y', y'' les racines de l'équation (2), le produit des segments que l'axe de la parabole détermine sur la corde des contacts a pour valeur absolue $-\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$ ou $+\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$, suivant que y' et y'' ont des signes différents ou le même signe; mais, dans ce dernier cas, la corde des contacts, prolongée extérieurement à la parabole, rencontre l'axe en un point dont la distance au sommet de la courbe ne peut être moyenne proportionnelle entre les deux segments de la corde; il s'ensuit qu'il faut prendre $-\frac{y'y''}{\cos^2\alpha}$ pour valeur du produit de ces deux segments. D'autre part, l'abscisse du point où la corde des contacts rencontre l'axe de la parabole est égale à $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$. On a donc

$$\frac{\lambda^2}{\cos\alpha^2} = -\frac{y'y''}{\cos^2\alpha} = \frac{2p\lambda}{\cos\alpha\cos^2\alpha}.$$

(G.)

Donc le lieu cherché est une parabole dont le paramètre est le quart de celui de la parabole donnée.

Note. — Autres solutions analytiques de la même question par MM. Pellissier; Moret-Blanc; Lez; Demartres; Sondat; E. Barisien; Joseph Chailan et Édouard Guillet, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins; Ch. Picard, élève au lycée de Grenoble (classe de M. Bernard); Leloutre et L. Portail, élèves en spéciales au lycée de Lille (classe de M. Walecki); P. Lebard et Chapsal, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes; Georges Rendu, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens; Goulin, élève au lycée Corneille à Rouen; Thévenin, élève au lycée Charlemagne.

Solution géométrique de la même question 1186

(voir p. 1,0);

PAR M. C. MOREAU.

Capitaine d'Artillerie.

Soient A le sommet et M un point quelconque de la parabole donnée (*); BC une corde parallèle à la tangente en M. Cette corde coupera l'axe en un point D, son milieu I et son pôle P seront sur le diamètre passant par le point M.

Cela posé, la corde BC satisfera à la condition de l'énoncé si l'on a

$$(1)\qquad \overline{BI}^2 = AD.MI.$$

En effet, en menant AE égale et parallèle à DI, la relation précédente entraîne, d'après une propriété fondamentale de la parabole,

$$AE^2 = AD.ME\ (^{**}),$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) L'équation de la parabole rapportée au diamètre MI et à la tangente en M est, comme on sait, $y^2 = 2p'x$, où $2p'$ représente le paramètre relatif au diamètre MI. Dans ce système d'axes, le point B a pour coordonnées les droites BI, MI; les coordonnées du point A sont $\pm$ AE et ME. De là $\overline{BI}^2 = 2p'$MI, et $\overline{AE}^2 = 2p'$ME. La première de ces deux équations, comparée à l'égalité (1) $\overline{BI}^2 =$ AD.MI, donne $2p' =$ AD, et

d'où, en retranchant de l'égalité (1), et réduisant

$$BD.DC = AD^2.$$

Maintenant, le centre de l'hyperbole équilatère tangente en B et en C aux droites PB, PC se trouve sur la médiane PI du triangle PBC, en un point O déterminé par la relation

$$\overline{BI}^2 = IO.IP = 2IO.MI,$$

et il en résulte, par comparaison avec l'inégalité (1),

$$IO = \frac{AD}{2}.$$

Si alors on désigne par $2p$ le paramètre de la parabole donnée; par x', y' les coordonnées du point M, et par x, y celles du point O, on a d'abord, à cause de l'égalité (1)

$$AD = 2(p + 2x')$$

et ensuite

$$y = y', \quad x = \frac{AD}{2} + \frac{y'}{\left(\frac{p}{y'}\right)} = p + 4x'.$$

Il vient donc enfin pour l'équation du lieu cherché

$$y^2 = \frac{p}{2}(x - p),$$

---

par suite la seconde devient $\overline{AE}^2 = AD.ME$. On en déduit $BD.DC = AD^2$.

D'après cela, on voit que, pour qu'il soit possible de mener par un point D de l'axe de la parabole une corde BDC telle qu'on ait $BD.DC = \overline{AD}^2$, il faut que la distance AD du point D au sommet A soit au moins égale au paramètre $2p$ de la parabole. Si $AD = 2p$, la corde BDC sera perpendiculaire à l'axe, la question n'admettra qu'une seule solution. Si $AD > 2p$, on décrira du foyer comme centre, avec un rayon egal au quart de AD, un arc de cercle qui coupera la parabole en deux points M et M', symétriques par rapport à l'axe, et l'on mènera par le point D des cordes parallèles aux tangentes en M et M' : chacune de ces cordes répondra à la question. (G.)

équation d'une parabole dont le sommet est à une distance égale à p de celui de la parabole donnée, qui a même axe qu'elle, et un paramètre quatre fois moindre.

QUESTIONS.

1191. Les foyers de toutes les ellipses, qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence.

1192. Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

1193. On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe (*).

1194. Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient sur le côté de la base 1, 2 ou 48. (E. Lucas.)

1195. Une pile de boulets à base carrée ou à base triangulaire ne contient jamais un nombre de boulets égal au cube ou à la cinquième puissance d'un nombre entier. (E. Lucas.)

1196. Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(x+1)^y = x^{y+1} + 1.$$

(*) Les énoncés de ces trois questions sont extraits de l'Ouvrage intitulé : *Conic sections treated geometrically*, by W.-H. Besant, M. A., F. R. S., Lecturer and late Fellow of St-John's College. Seconde édition; 1875.

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES 3 A 3, QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES; CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE; APPLICATIONS;

Par M. A. VACHETTE.

[suite(*).]

VII. *Parts que donnent les permutations à un intervalle.*

1° Part des $N_{q-1}(s_3)$.

Cette espèce contient $\frac{1}{3(q-1)} N_{q-1}(s_3)$ tournantes. Avec le premier h, on ferme s_3 de deux manières (V), et, si l'on commence la tournante par cet h, portant ainsi le numéro 1, on aura

(VI) $$\frac{(3q-7)(3q-8)}{2}$$

systèmes de places pour les deux autres h; ainsi une tournante de l'espèce $N_{q-1}(s_3)$ en fournit $(3q-7)(3q-8)$ à l'espèce $C_{q,3}$; ce seront des tournantes complètes, car, deux des trois a faisant partie de s_3, il n'y a point pour les a de positions symétriques. La part fournie en tournantes sera

$$\frac{1}{3(q-1)}(3q-7)(3q-8)N_{q-1}(s_3),$$

et, en permutations,

$$\frac{q}{q-1}(3q-7)(3q-8)N_{q-1}(s_3).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 114.

2° Part des $N_{q-1}(s_4)$.

Si l'on ferme s_4 avec un seul h on aura $\frac{(3q-7)(3q-8)}{2}$ systèmes de places pour les deux autres.

Si on le ferme avec deux h, il y a (pour $q=6$)

$$\underline{a^h b a^h b}.'.'.'.'.'.'.'.'.'.'.'.$$

$3q-8$ places pour le troisième, autant moins une qu'il reste de lettres en dehors de s_4.

Le nombre des systèmes est

$$3q-8+\frac{(3q-7)(3q-8)}{2}=\frac{(3q-5)(3q-8)}{2}.$$

La part fournie est

$$\frac{q}{2(q-1)}(3q-5)(3q-8)\,N_{q-1}(s_4).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_5)$.

On ferme s_5 de deux manières, avec deux h (V) ; pour chacune d'elles ($q=6$), il y a pour le troisième h

$$\underline{ab'ab'a}.'.'.'.'.'.'.'.'.'.'.'$$

$3q-8$ places, autant de places qu'il reste de lettres en dehors de s_5 ; on a donc $2(3q-8)$ systèmes. La part est

$$\frac{2q}{q-1}(3q-8)\,N_{q-1}(s_5).$$

4° Part des $N_{q-1}(s_6)$.

Si l'on ferme s_6 avec deux h, on aura, pour le troisième, $3q-8$ places

$$\underline{ab'ab'ab}.'.'.'.'.'.'.'.'.'.'$$

autant plus une qu'il reste de lettres en dehors de s_6.

On peut encore le fermer d'une autre manière avec les trois h (V).

Il y a $3q - 8 + 1$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1}(3q-7)\,N_{q-1}(s_6).$$

Cette part semble illusoire pour $q = 3$; mais, comme $N_2(s_6)$ est le seul terme d'ordre 2 qui fournisse des $C_{3,3}$, qu'on sait que $C_{3,3} = P_3$, et $N_2(s_6) = 2$, il faut que le facteur de $N_2(s_6)$ soit $\frac{6}{2}$ ou 3, ce qui a lieu. Pour les $C_{3,3}$, on a seulement la variété

abcabcabc,

ce qui donne bien $C_{3,3} = 6 = P_3$.

5° Part des $N_{q-1}(p_5)$.

On peut fermer p_5 avec deux h de trois manières (V). De la première manière ($q = 6$), il y a $3q - 9$ places pour le troisième h

$a'bac'a\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'.$

autant, moins une, qu'il reste de lettres en dehors de p_5.

De chacune des deux autres manières, il y a $3q - 8$ places, autant qu'il reste de lettres

$ab'ac'a\;'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'$

On a $3q - 9 + 2(3q - 8) = 9q - 25$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1}(9q-25)\,N_{q-1}(p_5).$$

6° Part des $N_{q-1}(p_6)$.

Il y a deux manières de fermer p_6 avec deux h.

De la première manière ($q = 6$), il y a, pour le troisième h, $3q - 9$ places, autant qu'il reste de lettres en dehors de p_6

$a'bac'ac'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'\,.'.$

De la seconde, il y en a $3q - 8$, autant plus une, qu'il reste de lettres

$$\underline{a\,b'ac'ac'}\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'.$$

On peut aussi fermer p_6 d'une manière avec les trois h.

On a $3q - 9 + 3q - 8 + 1$ ou $6q - 16$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1}(6q-16)\,N_{q-1}(p_8).$$

7° Part des $N_{q-1}(p_7)$.

On peut fermer p_7 d'une manière avec deux h (V) ; il y a pour le troisième $3q - 9$ places, autant plus une qu'il reste de lettres en dehors de p_7

$$\underline{ab'abc'bc}\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'\ .'.$$

On peut aussi fermer p_7 de deux manières avec les trois h (V).

On a $3q - 9 + 2$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q}{q-1}(3q-7)\,N_{q-1}(p_7).$$

8° Parts des $N_{q-1}(t_8)$ et des $N_{q-1}(t'_8)$.

On peut fermer t_8 ou t'_8 de quatre manières (V). Les parts sont

$$\frac{4q}{q-1}N_{q-1}(t_8),\quad \frac{4q}{q-1}N_{q-1}(t'_8).$$

9° Parts des $N_{q-1}(t_9)$ et des $N_{q-1}(t'_9)$.

On peut fermer t_9 ou t'_9 de deux manières (V). Les parts sont

$$\frac{2q}{q-1}N_{q-1}(t_9),\quad \frac{2q}{q-1}N_{q-1}(t'_9).$$

Il y a exception pour $q = 4$ dans le cas du t_9, comme on l'a vu (V) : la part est $\frac{4}{3}N_3(t_9)$ au lieu de $\frac{8}{3}N_3(t_9)$.

10° Parts des $N_{q-1}(t_{10})$.

On ne peut fermer t_{10} que d'une manière (V). La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(t_{10}).$$

La somme S' de ces douze parts, en y mettant en évidence le facteur $\frac{q}{q-1}$, s'obtient par

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q} S' = {} & N_{q-1}(t_{10}) + 2N_{q-1}(t_9) + 2N_{q-1}(t'_9) + 4N_{q-1}(t_8) \\ & + 4N_{q-1}(t'_8) + (3q-7) N_{q-1}(p_7) \\ & + (6q-16) N_{q-1}(p_6) + (9q-25) N_{q-1}(p_5) \\ & + (3q-7) N_{q-1}(s_6) + 2(3q-8) N_{q-1}(s_5) \\ & + \tfrac{1}{2}(3q-5)(3q-8) N_{q-1}(s_4) \\ & + (3q-7)(3q-8) N_{q-1}(s_3).\end{aligned}$$

VIII. *Parts que donnent les permutations à deux intervalles.*

On a trouvé treize espèces; nous en compterons quatorze, parce que pour l'une d'elles, $N_{q-1}(2s_3)$, la part fournie n'est point la même, selon que les s_3 sont ou non consécutifs; on considère les deux espèces $N_{q-1}(2s_3)_0$ et $N_{q-1}(2s_3)_n$, les indices o et n marquant qu'il y a ou non séquence.

1° Part des $N_{q-1}(2s_3)$.

En général, on a deux manières de fermer chaque s_3 avec un h, ce qui donne quatre manières pour l'ensemble des deux s_3, et, pour chacune des quatre manières, il y a $3q-9$ places pour le troisième h, ce qui donne $4(3q-9)$ ou $12q-36$ systèmes; il y a autant de places qu'il reste de lettres en dehors des s_3:

a'ba '.'.'.'.' cd'c .'.'.'.'.,

a'ba '.'.'.'. c'dc '.'.'.'.'.,

ab'a .'.'.'.' cd'c .'.' '.'.',

ab'a .'.'.'. c'dc '.'.'.'.'.'.

Si les deux s_3 sont consécutifs, la quatrième manière laisse une place de plus; au lieu de $12q - 36$ on a $12q - 35$ systèmes :

$$\begin{array}{l} \underline{a'ba'}\,\underline{cd'e} \quad .'.'.'.'.'.'.'.'., \\ \underline{a'ba}\,\underline{c'dc} \quad '.'.'.'.'.'.'.'.'., \\ \underline{ab'a}\,\underline{cd'c} \quad .'.'.'.'.'.'.'.'.', \\ \underline{ab'a}\,\underline{c'dc} \quad '.'.'.'.'.'.'.'.'.'. \end{array}$$

La part est

$$\frac{q}{q-1}\left[(12q - 36)\,N_{q-1}(2s_3)_n + (12q - 35)\,N_{q-1}(2s_3)_0\right];$$

et, comme

$$N_{q-1}(2s_3)_n = N_{q-1}(2s_3) - N_{q-1}(2s_3)_0,$$

on comptera

$$\frac{q}{q-1}\left[(12q - 36)\,N_{q-1}(2s_3) + N_{q-1}(2s_3)_0\right].$$

2° Part des $N_{q-1}(s_4, s_3)$.

Si l'on ferme s_4 avec un seul h, et s_3 de deux manières avec un autre h (V), il y a, pour le troisième h, $3q - 9$ places

$$\underline{ab'a} \quad .'.'.'.'.'.' \quad \underline{cd'cd} \quad '.'.'.',$$

autant, plus une, qu'il reste de lettres en dehors des deux intervalles, d'où $2(3q - 9)$ systèmes.

Si l'on ferme s_4 avec deux h, il y a deux manières de fermer s_3.

On a $2(3q - 9) + 2$ ou $2(3q - 8)$ systèmes. La part est

$$\frac{2q(3q - 8)}{q-1}\,N_{q-1}(s_4, s_3).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_5, s_3)$.

On ferme s_5 de deux manières avec deux h, et s_3 de

deux manières. On a quatre systèmes. La part est

$$\frac{4q}{q-1}\,\mathrm{N}_{q-1}(s_5, s_3).$$

4° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(s_6, s_3)$.

On ferme s_6 d'une manière avec deux h, et s_3 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1}\,\mathrm{N}_{q-1}(s_6, s_3).$$

5° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_5, s_3)$.

On ferme p_5 de trois manières avec deux h, et s_3 de deux. La part est

$$\frac{6q}{q-1}\,\mathrm{N}_{q-1}(p_5, s_3).$$

6° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_6, s_3)$.

On ferme p_6 de deux manières avec deux h, s_3 de deux. La part est

$$\frac{4q}{q-1}\,\mathrm{N}_{q-1}(p_6, s_3).$$

7° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_7, s_3)$.

On ferme p_7 de deux manières avec deux h, s_3 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1}\,\mathrm{N}_{q-1}(p_7, s_3).$$

8° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(2s_4)$.

On peut fermer chaque s_4 avec un h, et, pour le troisième h, il y a $3q-9$ places, autant de places

$$\underline{ab'ab}\ '.'.'.'.'\ \ \underline{cd'cd}\ '.'.'.',$$

plus deux, qu'il reste de lettres en dehors des s_4; d'où $3q-9$ systèmes.

On peut fermer l'un des s_4 avec deux h, et l'autre avec un seul; d'où deux systèmes.

Il y a en tout $3q - 9 + 2$ ou $3q - 7$ systèmes. La part est

$$\frac{q(3q-7)}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(2s_4).$$

9° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(s_5, s_4)$.

On ferme s_4 avec un h, et s_5 de deux manières avec deux h. La part est

$$\frac{2q}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(s_5, s_4).$$

10° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(s_6, s_4)$.

On ferme s_6 et s_4 chacun d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(s_6, s_4).$$

11° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_5, s_4)$.

On ferme s_4 d'une manière, et p_5 de trois. La part est

$$\frac{3q}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(p_5, s_4).$$

12° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_6, s_4)$.

On ferme s_4 d'une manière, p_6 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(p_6, s_4).$$

13° Part des $\mathrm{N}_{q-1}(p_7, s_4)$.

On ferme p_7 et s_4 chacun d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} \mathrm{N}_{q-1}(p_7, s_4).$$

La somme de ces treize parts, désignée par S″, donne, en mettant en évidence le facteur $\dfrac{q}{q-1}$,

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q}\mathrm{S}'' = {} & \mathrm{N}_{q-1}(p_7 s_4) + 2\mathrm{N}_{q-1}(p_7 s_3) + 2\mathrm{N}_{q-1}(p_6 s_4) \\ & + 4\mathrm{N}_{q-1}(p_6 s_3) + 3\mathrm{N}_{q-1}(p_5 s_4) + 6\mathrm{N}_{q-1}(p_5 s_3) \\ & + \mathrm{N}_{q-1}(s_6 s_4) + 2\mathrm{N}_{q-1}(s_6 s_3) + 2\mathrm{N}_{q-1}(s_5 s_4) \\ & + 4\mathrm{N}_{q-1}(s_5 s_3) + (3q-7)\mathrm{N}_{q-1}(2s_4) \\ & + (3q-8)\mathrm{N}_{q-1}(s_4 s_3) + (12q-36)\mathrm{N}_{q-1}(2s_3) \\ & + \mathrm{N}_{q-1}(2s_{\ldots})\end{aligned}$$

IX. *Parts que donnent les permutations à trois intervalles.*

1° Part des $N_{q-1}(3s_3)$.

Chaque s_3 peut être fermé de deux manières, d'où huit systèmes; la part est

$$\frac{8q}{q-1} N_{q-1}(3s_3).$$

2° Part des $N_{q-1}(2s_3, s_4)$.

On ferme chaque s_3 de deux manières, et s_4 d'une. La part est

$$\frac{4q}{q-1} N_{q-1}(2s_3, s_4).$$

3° Part des $N_{q-1}(s_3, 2s_4)$.

On ferme chaque s_4 d'une manière, et s_3 de deux. La part est

$$\frac{2q}{q-1} N_{q-1}(s_3, 2s_4).$$

4° Part des $N_{q-1}(3s_4)$.

On ferme chaque s_4 d'une manière. La part est

$$\frac{q}{q-1} N_{q-1}(3s_4).$$

La somme de ces quatre parts, désignée par S''' donne, en mettant en évidence le facteur $\frac{q}{q-1}$,

$$\frac{q-1}{q} S''' = N_{q-1}(3s_4) + 2N_{q-1}(2s_4, s_3) + 4N_{q-1}(s_4, 2s_3) + 8N_{q-1}(3s_3).$$

X. *Formule générale d'abaissement.*

On a évidemment la formule abrégée

$$C_{q,0} = \tfrac{1}{2}q(3q-7)(3q-8)C_{q-1,0} + S' + S'' + S''',$$

mais il est nécessaire de la développer. On multiplie tout

par $\frac{q-1}{q}$, et l'on a

$$\begin{aligned}
\frac{q-1}{q} C_{q,3} = & \tfrac{1}{2}(q-1)(3q-7)(3q-8) C_{q-1,3} \\
& + N_{q-1}(t_{10}) + 2N_{q-1}(t_9) + 2N_{q-1}(t'_9) + 4N_{q-1}(t_8) \\
& + 4N_{q-1}(t'_8) + (3q-7)N_{q-1}(p_7) + (6q-16)N_{q-1}(p_6) \\
& + (9q-25)N_{q-1}(p_5) + (3q-7)N_{q-1}(s_6) \\
& + 2(3q-8)N_{q-1}(s_5) + \tfrac{1}{2}(3q-5)(3q-8)N_{q-1}(s_4) \\
& + (3q-7)(3q-8)N_{q-1}(s_3) + N_{q-1}(p_7, s_4) \\
& + 2N_{q-1}(p_7, s_3) + 2N_{q-1}(p_6, s_4) + 4N_{q-1}(p_6, s_3) \\
& + 3N_{q-1}(p_5, s_4) + 6N_{q-1}(p_5, s_3) + N_{q-1}(s_6, s_4) \\
& + 2N_{q-1}(s_6, s_3) + 2N_{q-1}(s_5, s_4) + 4N_{q-1}(s_5, s_3) \\
& + (3q-7)N_{q-1}(2s_4) + 2(3q-8)N_{q-1}(s_4, s_3) \\
& + (12q-36)N_{q-1}(2s_3) + N_{q-1}(2s_3)_0 \\
& + N_{q-1}(3s_4) + 2N_{q-1}(2s_4, s_3) + 4N_{q-1}(s_4, 2s_3) \\
& + 8N_{q-1}(3s_3).
\end{aligned}$$

Il y a trente et un termes dans la formule. Le premier est calculé par abaissement d'ordre, comme l'est $C_{q,3}$ lui-même. (*A suivre.*)

NOTE SUR LA CONTINUITÉ DES RACINES DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. ROUQUET,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

LEMME. — *Lorsque dans l'équation à coefficients réels ou imaginaires, mais finis,*

$$(1) \quad f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1} x + p_m = 0,$$

les k derniers coefficients $p_m, p_{m-1}, \ldots, p_{m-k+1}$ tendent

vers zéro, de manière que p_{m-k} conserve une valeur différente de zéro, k racines tendent vers zéro et réciproquement.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les m racines de l'équation, qui varient en même temps que les coefficients, tout en restant finies comme ces coefficients eux-mêmes, k' le nombre des racines qui tendent vers zéro. Il s'agit de prouver que $k = k'$.

A cet effet, écrivons dans l'ordre suivant les relations entre les coefficients et les racines :

$$a_1 a_2 \ldots a_m = (-1)^m p_m,$$
$$a_1 a_2 \ldots a_{m-1} + \ldots = (-1)^{m-1} p_{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_1 + \ldots = -p_1.$$

1° Supposons $k < k'$. Considérons les k' premières relations. Chacun des termes de toutes ces sommes de combinaisons renferme au moins l'une des k' racines qui tendent vers zéro, puisque le nombre des éléments contenus dans ces diverses combinaisons est au moins égal à $m - k' + 1$. Dès lors toutes ces sommes doivent tendre vers zéro, et, par suite, il doit en être de même des k' derniers coefficients de l'équation; donc on ne peut avoir $k < k'$.

2° Supposons, en second lieu, $k > k'$. Prenons alors la $(k' + 1)^{ième}$ relation, savoir :

$$a_1 a_2 \ldots a_{m-k'} + \ldots = (-1)^{m-k'} p_{m-k'},$$

$k' + 1$ étant au plus égal à k, $p_{m-k'}$ tend vers zéro, par hypothèse.

D'autre part, le premier membre se compose d'une somme de termes renfermant une ou plusieurs des racines qui tendent vers zéro, et d'un autre terme égal au pro-

duit des $m - k'$ racines conservant des valeurs différentes du zéro. Ce premier membre n'aurait donc pas zéro pour limite, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par suite, on n'a pas non plus $k > k'$, et la proposition est démontrée.

Théorème. — *Si, pour un système de valeurs des coefficients, l'équation* (1) *admet k_1 racines égales à a_1, k_2 racines égales à $a_2, \ldots$, la nouvelle équation obtenue en faisant varier aussi peu qu'on voudra les coefficients de la première, admettra k_1 racines aussi voisines que l'on voudra de a_1, k_2 racines aussi voisines que l'on voudra de $a_2, \ldots$.*

Nous allons démontrer, par exemple, que la nouvelle équation aura k_1 racines aussi rapprochées que l'on voudra de a_1. Posons

$$(2) \qquad x = y + a_1.$$

L'équation transformée est

$$(3) \qquad y^m + y^{m-1}\frac{f^{m-1}(a_1)}{1.2\ldots(m-1)} + \ldots + yf'(a_1) + f(a_1) = 0.$$

Ses coefficients sont des fonctions entières et par suite continues de $p_1, p_2, \ldots$. Puisque, pour un système de valeurs des coefficients, l'équation (1) a k_1 racines égales à a_1, pour ces mêmes valeurs, l'équation (3) aura, en vertu de la relation (2), k_1 racines nulles, ce qui exige que l'on ait pour ces valeurs

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad \ldots, \quad f^{k_1-1}(a_1) = 0,$$

$f^{k_1}(a_1)$ n'étant pas nulle. Si maintenant on fait tendre les coefficients variables $p_1, p_2, \ldots$ vers les valeurs particulières dont il est question, $f(a_1), f'(a_1), \ldots, f^{k_1-1}(a_1)$ tendront vers zéro, $f^{k_1}(a_1)$ conservant une valeur différente de zéro. Il en résulte, d'après le lemme, que

k_1 racines de l'équation (3) tendront vers zéro, en sorte que l'équation (1) aura k_1 racines aussi voisines que l'on voudra de a_1, comme le montre encore la formule (2).

THÉORÈME. — *Les mêmes conclusions subsistent pour l'équation générale*

$$(4)\qquad A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0,$$

pourvu que le coefficient A_0 *ne tende pas vers zéro. Si les k premiers coefficients tendent vers zéro, le* $(k+1)^{\text{ième}}$ *ayant une limite différente de zéro, k racines deviennent infinies, et les m — k racines restantes tendent vers les racines de l'équation obtenue en supprimant dans la proposée les coefficients qui s'annulent et en y remplaçant les autres par leurs limites.*

1° Si A_0 ne tend pas vers zéro, nous pourrons diviser par A_0, et l'équation deviendra la suivante :

$$x^m + \frac{A_1}{A_0} x^{m-1} + \ldots + \frac{A_m}{A_0} = 0,$$

dont les coefficients varient d'une manière continue, puisque le dénominateur commun A_0 n'a pas zéro pour limite. Nous sommes dès lors ramenés au théorème précédent.

2° Si $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ tendent vers zéro, et si, en même temps, la limite de A_k n'est pas nulle, nous poserons

$$(5)\qquad x = \frac{\alpha y + 1}{y},$$

α désignant une constante.

La transformée en y sera

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} & A_0(\alpha y + 1)^m + A_1(\alpha y + 1)^{m-1} y + \ldots + A_{k-1} y^{k-1} \\ & \quad \times (\alpha y + 1)^{m-k+1} + A_k y^k (\alpha y + 1)^{m-k} + \ldots + A_m y^m = 0. \end{aligned} \right.$$

Le coefficient de y^m, savoir $A_0 \alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + \ldots + A_m$

peut être supposé différent de zéro pour tous les systèmes de valeurs des coefficients que nous considérons. Il suffit, pour cela, de choisir α convenablement. $\Big($Par exemple, si la limite de A_m n'est pas nulle, on pourra faire $\alpha = 0$, ce qui donne la tranformation connue $x = \frac{1}{y}\Big)$.

Dès lors, d'après la première partie de la proposition, les racines de l'équation (6) varieront d'une manière continue avec ses coefficients et par suite avec $A_0, A_1, \ldots$. Or, si l'on introduit d'abord les hypothèses qui annulent $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, l'équation (6) a k racines nulles, et les $m-k$ racines restantes sont fournies par l'équation

$$A_k(\alpha y + 1)^{m-k} + A_{k+1} y(\alpha y + 1)^{m-k-1} + \ldots + A_m y^{m-k} = 0,$$

obtenue en divisant par y^k, c'est-à-dire en supprimant les k racines nulles. Comme ces $m-k$ racines sont toutes différentes de zéro, puisque la valeur de A_k n'est pas nulle, cette nouvelle équation pourra s'écrire

$$(7) \quad A_k\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)^{m-k} + A_{k+1}\left(\frac{\alpha y + 1}{y}\right)^{m-k-1} + \ldots + A_m = 0.$$

Si maintenant, à partir de ces valeurs particulières, nous faisons varier les coefficients d'une manière continue, l'équation (6), d'après la remarque faite plus haut, admettra k racines qui tendront vers zéro, et $m-k$ racines qui tendront vers les racines de l'équation (7), où $A_k, A_{k+1}, \ldots$ ont reçu leurs valeurs limites, résultant de premières hypothèses.

Cela posé, revenons à la formule (5). Aux k valeurs de y tendant vers zéro correspondront k valeurs infinies de x, et aux $m-k$ valeurs restantes de y correspondront $m-k$ valeurs de x continues, puisque le dénomi-

nateur y n'a pas maintenant zéro pour limite, et qui auront pour limites les racines de l'équation

$$A_k x^{m-k} + A_{k+1} x^{m-k-1} + \ldots + A_m = 0,$$

déduite de (7) par la substitution inverse.

NOTE SUR LE RAYON DE COURBURE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. GAMBEY.

Traçons (*) la tangente et la normale en un point M d'une ellipse, par exemple, et par le point T où la tangente coupe le grand axe élevons une perpendiculaire TR sur cet axe; enfin prolongeons la normale qui rencontre TR en R et le grand axe en N. La longueur R de l'hypoténuse du triangle rectangle RTN est liée à celle du rayon de courbure ρ, en M, par la relation très-simple

$$\frac{R}{\rho} = \frac{a^2}{x^2},$$

dans laquelle a est le demi-grand axe de l'ellipse et x l'abscisse du point M.

La même relation a lieu pour l'hyperbole et la parabole; mais, dans cette dernière, elle se simplifie encore, et devient $R = \rho$, comme on peut, du reste, le démontrer directement.

Il en résulte une construction très-simple du rayon de courbure de la parabole en un point quelconque, et le centre de courbure s'en déduit facilement.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Remarquons encore que le rapport $\frac{R}{\rho}$ est caractéristique pour les trois coniques. On a, en effet, pour l'ellipse $\frac{R}{\rho} > 1$; pour l'hyperbole $\frac{R}{\rho} < 1$, et pour la parabole $\frac{R}{\rho} = 1$.

FORMULES PROPOSÉES PAR M. DESBOVES.

(voir 2e série, t. XIV, p. 508).

DÉMONSTRATION DE M. E. BARISIEN,

Sous-lieutenant d'état-major.

Première question. — *Si l'on donne à* R, r, r', r'', r''' *leur signification ordinaire, et que l'on désigne par* x, y, z *les rayons des trois cercles qui touchent intérieurement le cercle circonscrit à un triangle, et sont inscrits respectivement dans les angles* A, B, C *de ce triangle, on a les formules suivantes :*

$$(1)\qquad x = \frac{4Rr}{r''+r'''},\quad y = \frac{4Rr}{r'+r'''},\quad z = \frac{4Rr}{r'+r''};$$

$$(2)\qquad 4r = 2(x+y+z) - \left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}\right),$$

$$(3)\qquad \frac{1}{2R} + \frac{2}{r} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

$$(4)\qquad \frac{r'}{2Rr} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$$

$$(5)\qquad \frac{r''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y},$$

$$(6)\qquad \frac{r'''}{2Rr} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}.$$

Soient O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et α le centre du cercle inscrit dans l'angle A et tangent intérieurement au cercle circonscrit (*).

Dans le triangle $AO\alpha$, on a

$$AO = R,\quad A\alpha = \frac{x}{\sin\frac{A}{2}},\quad O\alpha = R - x,\quad \widehat{OA\alpha} = \frac{A}{2} + C - 90^\circ;$$

par suite,

$$(R-x)^2 = R^2 + \frac{x^2}{\sin^2\frac{A}{2}} - \frac{2Rx}{\sin\frac{A}{2}}\cos\left(\frac{A}{2} + C - 90^\circ\right),$$

équation qui donne

$$x\cos^2\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = r;$$

d'où

$$x\cos^2\frac{A}{2} = y\cos^2\frac{B}{2} = z\cos^2\frac{C}{2} = r.$$

D'autre part, on a

$$r' = p\,\text{tang}\,\frac{A}{2},\quad r'' = p\,\text{tang}\,\frac{B}{2},\quad r''' = p\,\text{tang}\,\frac{C}{2},$$

$$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

il s'ensuit

$$r'' + r''' = p\left(\text{tang}\,\frac{B}{2} + \text{tang}\,\frac{C}{2}\right) = p\,\frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = 4R\cos^2\frac{A}{2},$$

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{r'' + r'''}{4R}.$$

L'égalité $x\cos^2\frac{A}{2} = r$ devient $x\,\frac{r''+r'''}{4R} = r$, $x = \frac{4Rr}{r''+r'''}$.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

On aura de même

$$y = \frac{4Rr}{r + r'''}, \quad z = \frac{4Rr}{r' + r''};$$

les formules (1) sont donc démontrées.

De $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, on déduit la relation entre les cosinus

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \\ = 2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2} \right) \\ - \left(\cos^4 \frac{A}{2} + \cos^4 \frac{B}{2} + \cos^4 \frac{C}{2} \right), \end{aligned}$$

et comme $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r}{x}$, $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{r}{y}$, $\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{r}{z}$, on a

$$\frac{4r^3}{xyz} = 2r^2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} \right) - r^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right),$$

ce qui donne la formule (2).

Ajoutons les valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ tirées des formules (1) en tenant compte de la relation $r' + r'' + r''' = 4R + r$, il vient

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4R + r}{2Rr} = \frac{2}{r} + \frac{1}{2R};$$

c'est la formule (3).

Les formules (4), (5), (6) se déduisent immédiatement des relations (1), en formant les valeurs de $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} \right)$, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right)$, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right)$.

On voit que les formules (1) permettent de calculer x, y, z, connaissant R, r, r', r'', r'''; les autres formules

permettent de calculer successivement r, R, r', r'', r''' en fonction de x, y, z.

Seconde question. — *Si x_1, y_1, z_1 représentent les rayons des cercles tangents extérieurement au cercle circonscrit au triangle, et inscrits respectivement dans les angles* A, B, C, *on a*

$$(1') \qquad x_1 = \frac{4Rr'}{r'' + r'''}, \quad y_1 = \frac{4Rr''}{r' + r'''}, \quad z_1 = \frac{4Rr'''}{r' + r''},$$

$$(2') \qquad 32R^3 - 2R(y_1z_1 + x_1z_1 + x_1y_1) - x_1y_1z_1 = 0,$$

$$(3') \qquad x_1y_1z_1 = 16R^2r,$$

$$(4') \quad 4x_1y_1z_1r^3 - [(y_1z_1 + x_1z_1 + x_1y_1)r - x_1y_1z_1]^2 = 0;$$

et, si l'on pose $\dfrac{r + 4R}{2Rm} = \dfrac{1}{x_1 + 4R} + \dfrac{1}{y_1 + 4R} + \dfrac{1}{z_1 + 4R}$, on a aussi

$$(5') \quad r' = \frac{mx_1}{x_1 + 4R}, \quad r'' = \frac{my_1}{y_1 + 4R}, \quad r''' = \frac{mz_1}{z_1 + 4R}.$$

Soit α' le centre du cercle dont le rayon est x_1, le triangle A O α' donne, comme dans la première question,

$$(R + x_1)^2 = R^2 + \frac{x_1^2}{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)} - \frac{2Rx_1}{\sin\frac{A}{2}} \cos\left(\frac{A}{2} + C - 90^\circ\right),$$

d'où

$$x_1 \cos^2\frac{A}{2} = 4R \sin\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} = r';$$

mais

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{r'' + r'''}{4R};$$

donc

$$x_1 = \frac{4Rr'}{r'' + r'''}.$$

On obtient ainsi les formules (1').

Ces formules peuvent s'écrire

$$-\frac{4R}{x_1}r' + r'' + r''' = 0,$$
$$r' - \frac{4R}{y_1}r'' + r''' = 0,$$
$$r' + r'' - \frac{4R}{z_1}r''' = 0;$$

en éliminant r', r'', r''' entre ces trois dernières équations homogènes, on a l'équation

$$\begin{vmatrix} -\frac{4R}{x_1} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{4R}{y_1} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{4R}{z_1} \end{vmatrix} = 0,$$

dont le développement donne la formule $(2')$.

On a

$$x_1 y_1 z_1 = \frac{r' r'' r'''}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$
$$= \frac{p^3 \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = \frac{p^2}{\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}}$$
$$\times p \operatorname{tang}\frac{A}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}\operatorname{tang}\frac{C}{2} = 16R^2 r,$$

ce qui est la formule $(3')$.

En éliminant R entre $(3')$ et $(2')$, on a la formule $(4')$.

Des équations $(1')$, on déduit

$$(1'')\quad \begin{cases} x_1 + 4R = \dfrac{(4R + r)4R}{r'' + r'''}, \\ y_1 + 4R = \dfrac{(4R + r)4R}{r' + r'''}, \\ z_1 + 4R = \dfrac{(4R + r)4R}{r' + r''}, \end{cases}$$

et par suite

$$\frac{1}{x_1+4R}+\frac{1}{y_1+4R}+\frac{1}{z_1+4R}=\frac{2(r'+r''+r''')}{(4R+r)4R}=\frac{1}{2R};$$

donc

$$m=r+4R\ (^*).$$

En divisant membre à membre les équations (1') par les équations (1''), on a

$$(1''')\quad \frac{x_1}{x_1+4R}=\frac{r'}{m},\quad \frac{y_1}{y_1+4R}=\frac{r''}{m},\quad \frac{z_1}{z_1+4R}=\frac{r'''}{m};$$

ce sont les formules (5').

Les équations (1') donnent x_1, y_1, z_1, connaissant R, r, r', r'', r'''. Si, par exemple, on connaît r', r'', r''', on a r, R au moyen des relations

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}+\frac{1}{r'''},\quad 4R=r'+r''+r'''-r,$$

puis x_1, y_1, z_1 en fonction de r', r'', r'''. Si, inversement, x_1, y_1, z_1 sont connus, on en déduit R, r par les équations (2'), (3'), et les équations (5') donnent ensuite r', r'', r'''.

Note. — Ces différentes formules ont aussi été démontrées par MM. Lez et Moret-Blanc.

(*) Depuis que cette démonstration nous a été communiquée, M. Desboves a remarqué que les trois formules

$$r'=\frac{mx_1}{x_1+4R},\quad r''=\frac{my_1}{y_1+4R},\quad r'''=\frac{mz_1}{z_1+4R}\quad \text{(t. XIV, p. 509)}$$

peuvent être remplacées par les suivantes :

$$r'=\frac{4R+r}{x_1+4R}x_1,\quad r''=\frac{4R+r}{y_1+4R}y_1,\quad r'''=\frac{4R+r}{z_1+4R}z_1;$$

cela revient à dire que $m=4R+r$, et c'est effectivement ce que M. Barisien démontre.

Quant à la relation $\frac{1}{r}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{y_1}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{2R}$ indiquée, de même.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1869;

Par M. TOURETTES.

Trois fils élastiques de même matière et de même diamètre sont fixés par leurs extrémités aux trois sommets d'un triangle. On tend ces fils de manière à réunir leurs extrémités libres en un même nœud. On demande dans quel rapport doivent être les longueurs primitives des fils pour que la position d'équilibre du nœud soit le centre de gravité du triangle. On admettra que la tension de chaque fil est proportionnelle à son allongement par unité de longueur.

Soient α, β, γ les distances du centre de gravité aux trois sommets; x, y, z les longueurs primitives des fils; t, t', t'' leurs tensions; nous aurons, dans la position d'équilibre du nœud,

$$\frac{t}{\sin\widehat{\beta\gamma}} = \frac{t'}{\sin\widehat{\gamma\alpha}} = \frac{t''}{\sin\widehat{\alpha\beta}}$$

et, par hypothèse,

$$\frac{t}{\frac{\alpha - x}{x}} = \frac{t'}{\frac{\beta - y}{y}} = \frac{t''}{\frac{\gamma - z}{z}}.$$

Les valeurs de α, β, γ s'expriment aisément en fonction

---

par M. Desboves (t. XV, p. 133), elle se déduit très-simplement des trois formules qui précèdent, en ayant égard à ce que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''}$.

(G.)

des côtés ; nous avons, en outre,

$$\sin\widehat{\beta\gamma} = \frac{2}{3}\,\frac{s}{\beta\gamma};$$

s étant l'aire du triangle,

$$\sin\widehat{\gamma\alpha} = \frac{2}{3}\,\frac{s}{\gamma\alpha}, \quad \sin\widehat{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\,\frac{s}{\alpha\beta}.$$

Substituant, il vient facilement

$$\frac{\alpha - x}{\alpha x} = \frac{\beta - y}{\beta y} = \frac{\gamma - z}{\gamma z}$$

ou enfin

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{y} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{z} - \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{k},$$

k étant arbitraire. On tire de là les valeurs de $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$.

QUESTIONS DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

(voir 2e série, t. XIV, p. 323) ;

Par M. J. GRAINDORGE,
Professeur à l'Ecole des Mines, à Liége.

---

1. *Intégrer le système*

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + xf'(t) - y\varphi'(t) = 0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} + x\varphi'(t) + yf'(t) = 0. \end{cases}$$

En multipliant ces deux équations respectivement par y et par x et retranchant, il vient

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = (x^2 + y^2)\varphi'(t),$$

d'où

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = \varphi'(t)\,dt.$$

On tire de là

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y} = \varphi(t) + \alpha,$$

d'où

(2) $$x = y\,\operatorname{tang}[\varphi(t) + \alpha].$$

D'autre part, en multipliant les équations (1) respectivement par x et y, et ajoutant, on trouve

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + (x^2 + y^2)f'(t) = 0,$$

d'où

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + f'(t)\,dt = 0.$$

En intégrant, il vient

$$\tfrac{1}{2}l(x^2 + y^2) + f(t) = \text{const.} = l.\beta,$$

d'où

(3) $$x^2 + y^2 = \beta^2 e^{-2f(t)}.$$

En remplaçant x par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$y = \beta e^{-f(t)}\cos[\varphi(t) + \alpha];$$

par suite

$$x = \beta e^{-f(t)}\sin[\varphi(t) + \alpha].$$

2. *Étant donné le paraboloïde elliptique*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z,$$

évaluer l'aire de la partie de cette surface qui se projette sur le plan des xy à l'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

De l'équation de la surface on tire

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = \frac{y}{b}.$$

Par suite, en désignant par A l'aire cherchée, nous aurons

$$(1)\qquad A = 4\int\int dx\,dy\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}.$$

On devra donner à x, y toutes les valeurs positives satisfaisant à la relation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leqq 1.$$

En représentant le radical par z, nous aurons

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1$$

et

$$A' = \tfrac{1}{4}A = \int\int z\,dx\,dy.$$

Il résulte de cette formule que A' peut être considéré comme le volume du cylindre

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

compris entre les plans coordonnés et la surface

$$(3)\qquad z^2 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1.$$

Or, les sections faites dans la surface par des plans parallèles au plan des xy étant des ellipses (pour $z > 1$), on pourra prendre comme élément du volume la différence entre deux cylindres droits consécutifs ayant pour axes l'axe des z.

Le volume de l'un de ces deux cylindres est $\pi z XY$, en désignant par X, Y les axes de l'ellipse déterminée par le plan mené parallèlement au plan des xy à une hauteur égale à z :

$$X = a\sqrt{z^2-1},\quad Y = b\sqrt{z^2-1};$$

donc la différence entre les deux cylindres consécutifs ou l'élément de volume est

$$\pi z d(\mathrm{XY});$$

par suite

$$\mathrm{A}' = \tfrac{1}{4}\pi \int z d(\mathrm{XY}).$$

Les limites de z sont, en vertu des équations (2) et (3),

$$z = 1 \quad \text{et} \quad z = \sqrt{2};$$

donc

$$\mathrm{A}' = \frac{1}{4}\pi ab \int_1^{\sqrt{2}} z d(z^2 - 1)$$

$$= \frac{\pi ab}{2} \int_1^{\sqrt{2}} z^2 dz = \frac{\pi ab}{6}(2\sqrt{2} - 1).$$

Par conséquent, on a pour la surface cherchée

$$\mathrm{A} = \frac{2\pi ab}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

SOLUTION DE LA QUESTION DU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (1875);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver le lieu des pieds des normales menées d'un point donné P *à une série d'ellipses qui ont un sommet commun* B, *la même tangente en ce point, et telles que, pour chacune d'elles, le rapport de l'axe parallèle à la tangente commune au second axe soit égal à une constante donnée* k.

Construire le lieu dans les cas particuliers suivants : on prendra le point P *sur la bissectrice de l'un des angles formés par la tangente et la normale communes*

à toutes les ellipses en B, *et l'on attribuera à k successivement les valeurs* $\sqrt{3}$ *et* 2.

Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale communes, et soient kb et b les demi-axes de la conique ; son équation sera

(1) $$k^2y^2 + x^2 - 2k^2by = 0,$$

et celle de la normale au point (x, y)

$$Y - y = \frac{k^2(y - b)}{x}(X - x);$$

elle doit passer par le point donné (α, β), ce qui donne la condition

$$\beta - y = \frac{k^2(y - b)}{x}(\alpha - x)$$

ou

(2) $$(k^2 - 1)xy + \beta x - k^2\alpha y = k^2b(x - \alpha).$$

On obtient l'équation du lieu des pieds des normales en éliminant b entre les équations (1) et (2), ce qui donne

$$(k^2 - 2)xy^2 + 2\beta xy - k^2\alpha y^2 - x^3 + \alpha x^2 = 0.$$

Le lieu est une courbe du troisième degré ayant un point double à l'origine et pour asymptote la droite

$$x = \frac{k^2\alpha}{k^2 - 2};$$

elle a deux autres asymptotes dont le coefficient angulaire est $C = \pm\frac{1}{\sqrt{k^2 - 2}}$ et l'ordonnée à l'origine $\frac{2\beta C - k\alpha C^2 + \alpha}{2(k^2 - 2)C}$.

Cas particuliers.

1° $\beta = \alpha$, $k = \sqrt{3}$.

L'équation du lieu devient

$$xy^2 + 2\alpha xy - 3\alpha y^2 - x^3 + \alpha x^2 = 0,$$

qui se décompose en

$$y - x = 0,$$
$$x^2 + xy - \alpha x - 3\alpha y = 0.$$

Le lieu se compose donc de la droite BP et d'une hyperbole passant par le point B, dont le centre a pour coordonnées

$$x_0 = 3\alpha, \quad y_0 = 5\alpha,$$

et dont les asymptotes sont, l'une parallèle à l'axe des y, et l'autre perpendiculaire à la droite BP.

Connaissant les asymptotes et un point, on pourra sans difficulté déterminer les axes ou construire directement la courbe par points.

2° $\beta = \alpha$, $k = 2$.

L'équation du lieu est

$$2(x - 2\alpha)y^2 + 2\alpha xy - x^3 + \alpha x^2 = 0,$$

d'où

$$y = \frac{-\alpha x \pm x\sqrt{2x^2 - 6\alpha x + 5\alpha^2}}{2x - 4\alpha} = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}.$$

L'origine est un point double; les tangentes y ont pour coefficients angulaires

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{4}.$$

La courbe a trois asymptotes, l'une

$$x = 2\alpha,$$

parallèle à l'axe des y, et deux autres dont le coefficient angulaire est donné par l'équation

$$2u^2 - 1 = 0, \quad \text{d'où} \quad u = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

les ordonnées à l'origine sont

$$\frac{4\alpha u^2 - 2\alpha u - \alpha}{4u} = \frac{\sqrt{2} \mp 2}{\pm 4}\alpha,$$

d'où, pour les équations des asymptotes,

$$(2) \qquad y = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\alpha,$$

$$(3) \qquad y = -\frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\alpha.$$

Etudions les variations de l'ordonnée.

Lorsque x varie de zéro à α, y_1 est négatif, décroît jusqu'à un minimum et revient à zéro; x croissant de α à 2α, y_1 croît de zéro à $\frac{3}{2}\alpha$, et x croissant de 2α à l'infini, y_1 croît de $\frac{3}{2}\alpha$ à $+\infty$ en s'approchant de l'asymptote (2); x variant de zéro à $-\infty$, y_1 croît de zéro à $+\infty$ en s'approchant de l'asymptote (3).

On a ainsi une première branche s'étendant à l'infini dans les deux sens du côté des ordonnées positives.

Lorsque x varie de zéro à α, y_2 croît aussi de zéro à α; x croissant de α à 2α, y_2 croît de α à $+\infty$, d'où il passe brusquement à $-\infty$; x croissant de 2α à $+\infty$, y_2 croît de $-\infty$ jusqu'à un maximum, puis décroît de ce maximum jusqu'à $-\infty$ en s'approchant de l'asymptote (3). Lorsque x varie de zéro à $-\infty$, y_2 décroît aussi de zéro à $-\infty$ en s'approchant de l'asymptote (2). On obtient ainsi une seconde branche discontinue ayant trois asymptotes.

Cherchons le point où l'ordonnée est maximum ou

minimum.

$$f'_x = 2y^2 + 2\alpha y - 3x^2 + 2\alpha x = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et celle de la courbe, on trouve

$$4x^4 - 28\alpha x^3 + 65\alpha^2 x^2 - 64\alpha^3 x + 20\alpha^4 = 0$$

ou, en posant $\frac{x}{\alpha} = x'$,

$$4x'^4 - 28x'^3 + 65x'^2 - 64x' + 20 = 0.$$

Cette équation a une racine comprise entre zéro et 1, et une entre 2 et 4; les deux autres racines sont imaginaires. Les racines réelles sont 0,562 et 3,65, d'où $x = 0{,}562\,\alpha$, abscisse du point minimum, et $x = 3{,}65\,\alpha$, abscisse du point maximum.

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y = -0{,}098\,\alpha$$

pour le point minimum, et

$$y = -4{,}560\,\alpha$$

pour le point maximum.

Note. — La même question a été résolue par MM. Tourettes et Lez.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES, PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1875);

PAR M. GAMBEY,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux normales menées à la parabole aux deux extrémités

de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection ?

Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Application particulière au point maximum du lieu.

Soient $y^2 - 2px = 0$ et x_0, y_0, x_1, y_1 l'équation de la parabole et les coordonnées de deux points de cette courbe; k la valeur constante de la projection orthogonale de la corde qui unit ces deux points.

Les équations des deux normales sont

$$p(y - y_0) + y_0(x - x_0) = 0, \quad p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0$$

avec les conditions

$$y_0^2 = 2px_0, \quad y_1^2 = 2px_1, \quad y_1 = y_0 + k.$$

On élimine facilement x_0, x_1 et y_1, ce qui conduit à ces deux équations

$$(1) \qquad y_0^3 - 2p(x - p)y_0 - 2p^2y = 0,$$

$$(2) \qquad 3y_0^2 + 3ky_0 + k^2 - 2px + 2p^2 = 0.$$

Une transformation facile donne cette autre

$$(3) \qquad 3ky_0^2 + (k^2 + 4px - 4p^2)y_0 + 6p^2y = 0,$$

qui peut remplacer l'une des deux équations (1), (2). L'élimination de y_0 entre (2) et (3) donne

$$\begin{aligned} &32p^3x^3 - 12p^2(8p^2 + 3k^2)x^2 \\ &\quad + (72k^2p^2 + 12k^4 + 96p^4)px - 108p^4y^2 \\ &\qquad - (k^6 + 36p^4k^2 + 12p^2k^4 + 32p^6) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad 4p^3[8(x - p)^3 - 27py^2] = k^2[k^2 - 6p(x - p)]^2.$$

Elle représente une courbe du troisième degré, doublement tangente à la développée de la parabole qui a pour équation

$$8(x-p)^3 - 27py^2 = 0.$$

La ligne des contacts est donnée par

$$6p(x-p) = k^2;$$

elle est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

Pour $k = 0$, on trouve l'équation de la développée, ce qui pouvait être prévu.

Le lieu est une courbe formée d'une boucle et de deux branches infinies divergentes se croisant en un point double dont les coordonnées sont $x = p + \frac{k^2}{2p}$, $y = 0$. Son sommet a pour coordonnées $x = p + \frac{k^2}{8p}$, $y = 0$.

Par chacun des points du lieu on peut mener trois normales à la parabole; proposons-nous de déterminer les coordonnées des pieds de ces normales.

Soient α, β les coordonnées d'un point du lieu. L'équation (1), où nous ferons $x = \alpha$, $y = \beta$, déterminera les ordonnées des points cherchés. Soient y', y'', y''' ses trois racines; nous aurons les relations suivantes :

$$y' + 2y'' + k = 0,$$

$$2y'y'' + y''^2 + k(y' + y'') + 2p(\alpha - p) = 0.$$

Éliminant entre elles y'', il vient

$$y' = \pm\sqrt{\frac{8p\alpha - 8p^2 - k^2}{3}}.$$

Pour déterminer le signe qui convient, il faut vérifier l'équation (1). On obtiendra ensuite facilement les deux autres valeurs de y.

Le point maximum a pour coordonnées

$$\alpha = p + \frac{k^2}{4p}, \quad \beta = \frac{k^3}{12p^2\sqrt{3}}.$$

Si l'on applique la formule précédente à ce point, on obtient d'abord

$$y' = -\frac{k}{\sqrt{3}}.$$

Cette valeur vérifie l'équation (1); puis

$$y'' = -\frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$y''' = \quad \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Fiot, Moret-Blanc, Tourettes.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1875),

COMPOSITION DE JUILLET;

Par M. Edmond de LAMAZE,
Élève en mathématiques spéciales chez les Dominicains, à Sorrèze (classe de M. Dumont).

Étant donnés sur un plan deux points fixes F, A :

1° *Trouver l'équation générale des courbes du second degré qui, situées dans ce plan, ont un foyer en* F *et un sommet de l'axe focal en* A ;

2° *Déterminer le genre de la courbe représentée par cette équation générale, selon la valeur du paramètre variable qu'elle renferme ;*

3° *Disposer de ce paramètre variable de façon que la courbe du second degré passe par un point donné* P,

et discuter le nombre et le genre des solutions obtenues, selon la position du point P *dans le plan.*

1° Prenons pour axe des x la droite AF et pour axe des y la perpendiculaire Ay à AF. Soit AF $= a$; l'équation générale des coniques ayant un foyer en F et pour axe focal l'axe des x est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + p)^2,$$

où m et p représentent deux paramètres arbitraires; et, comme l'origine A est, dans le cas actuel, un sommet, l'équation précédente admet la solution

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{d'où} \quad P = a.$$

Donc l'équation générale des courbes du second degré, qui ont un foyer en F et un sommet de l'axe focal en A, est

$$(x - a)^2 + y^2 = (mx + a)^2$$

ou

(1) $$(1 - m^2)x^2 + y^2 - 2a(1 + m)x = 0.$$

2° Le genre de la courbe représentée par cette équation dépend de la valeur de $1 - m^2$. Suivant qu'on a

$$1 - m^2 > 0, \quad 1 - m^2 = 0, \quad 1 - m^2 < 0,$$

l'équation représente une ellipse ou une parabole, ou une hyperbole.

3° Pour que la courbe du second degré passe par un point P, ayant pour coordonnées α et β, il faut qu'on ait

$$(1 - m^2)\alpha^2 + \beta^2 - 2a(1 + m)\alpha = 0,$$

d'où

(2) $$\alpha^2 m^2 + 2a\alpha m - \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha = 0,$$

équation qui détermine les valeurs du paramètre variable m.

La nature des racines de cette équation dépend du signe de l'expression

$$a^2\alpha^2 + \alpha^4 - 2a\alpha^3 + \beta^2\alpha^2,$$

qui est la somme de deux carrés

$$(\alpha^2 - a\alpha)^2 + \beta^2\alpha^2.$$

On voit, d'après cela, que le problème proposé admet, en général, deux solutions.

Néanmoins, lorsque $\beta = 0$ et $\alpha = a$, l'expression $(\alpha^2 - a\alpha)^2 + \beta^2\alpha^2$ s'annule, et l'on ne trouve pour m qu'une seule valeur, qui est

$$m = -\frac{\alpha^2}{a^2} = -1.$$

L'équation (1) se réduit alors à $y^2 = 0$ et représente le système de deux droites coïncidant avec l'axe des x et formant, par conséquent, une variété du genre parabole.

Pour déterminer maintenant le genre des solutions obtenues suivant la position du point P dans le plan, nous désignerons par x et y les coordonnées variables du point P, et nous comparerons l'expression

$$\frac{-ax + \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2y^2}}{x^2}$$

à l'unité.

Posons

$$\frac{-ax + \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2y^2}}{x^2} = 1,$$

nous en tirons successivement

$$(x^2 + ax) = \sqrt{(x^2 - ax)^2 + x^2y^2},$$
$$x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 = x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + x^2y^2,$$
$$4ax^3 = x^2y^2,$$
$$y^2 = 4ax,$$

résultat facile à prévoir.

En outre, tous les points intérieurs à la parabole $y^2 = 4ax$ ont des coordonnées satisfaisant à l'inégalité

$$y^2 - 4ax < 0;$$

et pour tout point extérieur on a

$$y^2 - 4ax > 0 \quad (*).$$

On en peut conclure que tout point donné P, intérieur à cette parabole, donnera deux ellipses, et tout point extérieur, deux hyperboles.

Note. — La même question a été résolue par M. Barbarin.

CORRESPONDANCE.

1. — *Sur la question* 1181 (t. XIV, p. 384).

On a

$$1 = \frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} + \ldots,$$

quels que soient les nombres $a, b, c, \ldots$, pourvu que le second membre forme une série convergente (*ce qui a*

(*) Lorsque les racines de l'équation (2) satisfont à l'inégalité $1 - m^2 > 0$, ce qui est le cas où l'équation (1) représente une ellipse, l'unité est une limite supérieure des racines de l'équation (2). Il en résulte qu'en substituant l'unité à m dans le premier membre

$$\alpha^2 m^2 + 2a\alpha m - \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha$$

de cette équation, le résultat de la substitution doit être positif, ce qui donne $4a\alpha - \beta^2 > 0$, $\beta^2 < 4a\alpha$. Lorsque l'équation (1) représente une hyperbole, on a $1 - m^2 < 0$; l'équation (2) a une racine positive plus grande que l'unité, et une seule : donc la substitution de l'unité à m dans le premier membre de l'équation (2) conduit à un résultat négatif, $4a\alpha - \beta^2 < 0$, d'où $\beta^2 > 4a\alpha$. Enfin, si $1 - m^2 = 0$, les valeurs de m sont ± 1. Pour $m = +1$, l'équation (2) devient $\beta^2 = 4a\alpha$, et pour $m = -1$, $\beta^2 = 0$. (G.)

toujours lieu si a, b, c,... sont des nombre positifs croissants, par exemple). (H. Laurent.)

M. *Barbarin* a démontré (t. XV, p. 136) la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\ldots \\ &\qquad+\frac{l}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)} \\ &=1-\frac{1}{(a+1)(b+1)\ldots(l+1)}. \end{aligned}\right.$$

Or il résulte bien évidemment de cette formule que la série dont il est question a pour limite l'unité, ou un nombre moindre que l'unité, suivant que le produit des nombres positifs $a+1$, $b+1$, $c+1$,... croît sans limite assignable, ou tend vers une limite finie, déterminée; en d'autres termes, suivant que la somme $a+b+c+\ldots$ des nombres positifs $a, b, c,\ldots$ est divergente ou convergente.

Au premier de ces deux cas se rapportent les applications considérées par M. Barbarin. Des exemples relatifs au second cas, très-simples, et par cela même très-bien choisis, m'ont été communiqués par MM. *Jules Kœnig* et *Moreau.*

Il me reste à dire un mot de la Note qui suit l'article de M. Barbarin. Cette Note a suscité une réclamation à laquelle je m'empresse de faire droit, au moyen de la rectification suivante :

Au lieu de « *la même question a été résolue* », lisez : *la même formule* (1) *a été démontrée.*

2. M. le Cte Léopold Hugo écrit qu'il a adressé à l'Académie des Sciences plusieurs Notes sur la métaphysique des Mathématiques, ayant pour titre : la *Géométrie pan-imaginaire*, ou *à* $\frac{l}{m}$ *dimensions,* et que l'une de ces

Notes se termine ainsi : « La *Géométrie à* $\frac{l}{m}$ *dimensions* » *se rattache à l'Arithmétique à* $\frac{l}{m}$ *chiffres, ainsi qu'à* » *l'Algèbre à* $\frac{l}{m}$ *équations. Cet ensemble constitue les* » *Mathématiques pan-imaginaires.* »

L'Arithmétique à $\frac{l}{m}$ chiffres, l'Algèbre à $\frac{l}{m}$ équations, la Géométrie à $\frac{l}{m}$ dimensions, sont autant de logogriphes dont je ne chercherai pas à deviner le mot. J'attendrai qu'on me l'ait fait connaître pour m'occuper des Mathématiques *pan-imaginaires.*

M. Hugo a publié sous les différents titres de : *Essai sur la Géométrie des cristalloïdes ; Une réforme géométrique; Géométrie Hugodomoïdale,* des brochures où l'on trouve quelques propositions qui peuvent être remarquées à cause de leurs applications aux Arts et particulièrement à l'Architecture, ce qui me semble beaucoup plus utile que la métaphysique d'une Géométrie à $\frac{l}{m}$ dimensions. (G)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 111

(voir 1re série, t. V, p. 166);

Par M. H. BROCARD.

Soient M *un point pris sur une courbe plane et* MO *le rayon de courbure en ce point. Considérons* M *comme*

l'extrémité du petit axe d'une ellipse ayant en ce point même rayon de courbure MO : *quel est le lieu des foyers de cette ellipse?* (LANCRET.)

Soient $2a$ et $2b$ les axes de l'ellipse osculatrice, R le rayon de courbure au point M. Prenons ce point pour origine, la tangente et la normale pour axes de coordonnées.

Nous aurons, pour le foyer F,

$$x = b, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2},$$

avec la condition

$$\frac{a^2}{b} = R.$$

L'élimination de a et de b se fait immédiatement, et donne, pour le lieu des foyers, la circonférence

$$x^2 + y^2 - Rx = 0,$$

décrite sur OM comme diamètre.

Question 578

(voir 1re série, t. XX, p. 138);

PAR M. H. BROCARD.

Les quatre cercles inscrits dans un triangle sphérique sont touchés par un même cercle. (HART.)

La tangente du rayon sphérique de ce dernier cercle est la moitié de la tangente du rayon sphérique du cercle circonscrit au triangle. (SALMON.)

Supposons tracés, sur un plan P, un triangle rectiligne, ses trois hauteurs, les cercles inscrit, exinscrits, circonscrit, et le cercle des neuf points. Prenons le point de rencontre H des hauteurs pour centre d'une sphère de

rayon quelconque, et l'extrémité O du rayon OH, perpendiculaire au plan P, pour centre d'une projection stéréographique. Au triangle rectiligne correspond ainsi un triangle sphérique, dont les hauteurs ont pour projections les hauteurs du triangle rectiligne. A chaque cercle de la figure plane correspond également un cercle de la figure sphérique, jouissant des mêmes propriétés; mais le cercle des neuf points correspond à un petit cercle de la sphère; ce dernier est donc tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits au triangle sphérique. Ainsi se trouve établie la première proposition.

Pour démontrer la seconde, il suffit de remarquer que, si l'on considère le plan tangent P' à la sphère au point O' de rencontre des hauteurs du triangle sphérique, ce point O' est le centre de similitude d'une figure formée par les deux cercles traces de deux cônes ayant pour sommet le point O, et pour bases le cercle circonscrit au triangle rectiligne et le cercle des neuf points. La trace du plan passant par le point O et la ligne des centres de ces deux cercles est une tangente à la sphère, menée par le point O', et limitée aux deux cercles situés dans le plan P'. Le rapport de similitude n'ayant pas été modifié par cette construction et le rayon du cercle des neuf points étant la moitié de celui du cercle circonscrit, on en conclut que les tangentes des rayons sphériques des cercles correspondants sont dans le même rapport.

Question 1170

(voir 2e série, t. XIV, p. 240);

PAR M. PRAVAZ.

Démontrer que, dans les formules relatives à la résolution des triangles rectilignes, il est permis de rem-

placer les côtés a, b, c respectivement par

$$a \cos A \cos 2A \ldots \cos 2^{n-1} A,$$
$$b \cos B \cos 2B \ldots \cos 2^{n-1} B,$$
$$c \cos C \cos 2C \ldots \cos 2^{n-1} C$$

et les angles A, B, C *par*

$$p\pi \pm 2^n A, \quad q\pi \pm 2^n B, \quad r\pi \pm 2^n C,$$

où n désigne un nombre entier et positif quelconque et p, q, r des nombres entiers, dont les valeurs et les signes ne sont pas arbitraires.

On a, par exemple,

$$\pm\cos 2^n C = \frac{(a\cos A\ldots\cos 2^{n-1}A)^2 + (b\cos B\ldots\cos 2^{n-1}B)^2 - (c\cos C\ldots\cos 2^{n-1}C)^2}{2(a\cos A\ldots\cos 2^{n-1}A)(b\cos B\ldots\cos 2^{n-1}B)}.$$

(J.-W.-L. GLAISHER.)

Les formules fondamentales sont

$$(1) \qquad A + B + C = \pi,$$

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La première sera satisfaite par la substitution indiquée si l'on a

$$(3) \qquad p + q + r \pm 2^n = 1;$$

égalité à laquelle on peut satisfaire par des valeurs entières de p, q, r.

En se bornant à celles-ci, $\sin A$ sera remplacé par $\pm \sin 2^n A$, si p est pair, et par $\mp \sin 2^n A$, si p est impair; de même pour $\sin B$ et $\sin C$.

On a, d'après les formules (2),

$$\frac{a\cos A}{\sin A \cos A} = \frac{b\cos B}{\sin B\cos B} = \frac{c\cos C}{\sin C\cos C}$$

ou

$$\frac{a\cos A}{\sin 2A} = \frac{b\cos B}{\sin 2B} = \frac{c\cos C}{\sin 2C};$$

puis, comme on le démontrerait par le raisonnement dit *de proche en proche,*

$$\frac{a\cos A\cos 2A\ldots\cos 2^{n-1}A}{\sin 2^n A} = \frac{b\cos B\cos 2B\ldots\cos 2^{n-1}B}{\sin 2^n B}$$
$$= \frac{c\cos C\cos 2C\ldots\cos 2^{n-1}C}{\sin 2^n C}.$$

Ces formules se déduisent des formules (2) par les changements indiqués, pourvu que les nombres p, q, r soient tous pairs, ou tous impairs; or, puisque ces nombres doivent satisfaire à l'équation (3), ils ne peuvent être pairs ensemble.

Cette restriction faite, si l'on pose

$$a' = a\cos A\cos 2A\ldots\cos 2^{n-1}A,\quad b' = \ldots,\quad c' = \ldots,$$
$$A' = p\pi \pm 2^n A,\quad B' = \ldots,\quad C' = \ldots,$$

les éléments a', b', c', A', B', C' satisferont aux formules fondamentales de la Trigonométrie rectiligne et, par suite, à toutes celles qui s'en déduisent.

Note. — La même question a été résolue par MM. de Virieu et Moret-Blanc.

Question 1187

(voir 2e série, t. XIV, p. 528);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Étant donnée l'équation cubique

$$x^3 + px + q = 0,$$

dans laquelle la quantité $-4p^3 - 27q^2$ *est égale à un carré* r^2, *on sait que la différence entre deux racines*

quelconques de cette équation est exprimable par une fonction entière de la troisième racine, fonction qui est du second degré et dont les coefficients sont exprimés rationnellement au moyen des quantités connues p, q, r.

On propose, réciproquement, d'exprimer l'une quelconque des racines par une fonction entière du second degré de la différence entre les deux autres racines, les coefficients de cette fonction devant, de même, être exprimés rationnellement au moyen de p, q, r.

(S. Realis.)

Soient a une racine de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

et $V = b - c$ la différence des deux autres racines ; on sait qu'en posant

$$r^2 = -4p^3 - 27q^2,$$

on a

$$(1) \qquad V = \frac{1}{r}(6pa^2 - 9qa + 4p^2),$$

d'autre part, les relations

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = p$$

donnent

$$(b + c)^2 = a^2, \quad 4bc = 4a^2 + 4p;$$

d'où, par soustraction,

$$(2) \qquad (b - c)^2 = V^2 = -3a^2 - 4p.$$

Cela posé, si l'on ajoute membre à membre les équations (1) et (2), après les avoir multipliées respectivement par r et par $2p$, il vient

$$rV + 2pV^2 = -9qa - 4p^2,$$

et l'on tire de là, pour l'expression de la racine a, en

fonction de V,

$$a = -\frac{1}{9q}(2pV^2 + rV + 4p^2).$$

Remarque I. — On peut, de la manière suivante, arriver facilement à l'équation (1).

En multipliant par r^2 la valeur (2) de V^2, on a

$$r^2V^2 = (4p^3 + 27q^2)(3a^2 + 4p);$$

si maintenant on ajoute au second membre de cette équation la quantité nulle

$$36p^2(a^4 + pa^2 + qa) - 108pq(a^3 + pa + q),$$

on reconnaît qu'il devient égal au carré de l'expression

$$(6pa^2 - 9qa + 4p^2).$$

Remarque II. — La question 1187 est un cas particulier d'une propriété plus générale, qui peut s'énoncer ainsi : Si une fonction V de la racine a d'une équation algébrique de degré m peut se mettre sous la forme

$$A_0 a^{m-1} + A_1 a^{m-2} + \ldots + A_{m-1},$$

(et c'est ce qui arrive pour une fonction rationnelle quelconque), réciproquement, a sera exprimable en fonction entière de degré $m - 1$ de V, fonction dont les coefficients dépendront rationnellement de A_0, A_1, ..., A_{m-1} et des coefficients de l'équation proposée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Sondat, Barisien, Moret-Blanc, Pravaz.

Question 1190

(voir 2e série, t. XIV, p. 96);

PAR M. R.-W. GENESE,

M. A. du collége Saint-Jean, à Cambridge.

Démontrer que la formule

$$1 - \frac{2^3 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1^2)}{1.2.3.4} - \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{2.3.4.5.6} + \ldots$$

a pour valeur -1 *ou* $+1$, *selon que* n *est un nombre impair ou un nombre pair.* (S. REALIS.)

On sait que, si m est un nombre pair,

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \cos m\Phi = 1 - \frac{m^2}{2}\cos^2\Phi + \frac{m^2(m^2-2^2)}{2.3.4}\cos^4\Phi$$
$$- \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2.3.4.5.6}\cos^6\Phi + \ldots .$$

En faisant $\Phi = 0$ et $m = 2n$, on a l'égalité

$$(-1)^n = 1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)}{2.3.4}$$
$$- \frac{2^2 n^2 (2^2 n^2 - 2^2)(2^2 n^2 - 4^2)}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$
$$= 1 - \frac{2^2 n^2}{2} + \frac{2^4 n^2 (n^2 - 1^2)}{2.3.4}$$
$$- \frac{2^6 n^2 (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2)}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

dont le second membre a pour valeur -1 ou $+1$, selon que n est un nombre impair ou un nombre pair.

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Lévy, ancien élève de l'École Polytechnique, J. de Virieu, professeur à Lyon, Bourguet, Moreau, De Cuerne, Lucas.

QUESTIONS.

1197. On donne dans un même plan deux droites parallèles A, B, et un point C situé hors de l'espace limité par les deux parallèles ; par le point C on mène une sécante rencontrant les droites données en a et b, et sur ab comme diamètre on décrit un cercle ; démontrer que, si la sécante devient mobile, l'enveloppe du cercle est une hyperbole.

Corollaire. — Si, par le foyer F d'une hyperbole, on mène une droite coupant les tangentes aux sommets en des points t, t_1, le cercle décrit sur tt_1 comme diamètre est tangent aux deux branches de l'hyperbole.

(HARKEMA.)

1198. On donne un cercle et un point fixe dans le plan du cercle ; des différents points de la circonférence pris pour centres, on décrit des cercles passant par le point fixe ; trouver l'enveloppe des cordes d'intersection (réelles ou imaginaires) du cercle donné et des cercles décrits.

(HARKEMA.)

1199. Enveloppe de la polaire d'un point donné, par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné. (GAMBEY.)

1200. Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une droite donnée, menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné. (GAMBEY.)

1201. Par les sommets A, B, C d'un triangle inscrit dans un cercle on mène des perpendiculaires aux côtés opposés. Elles rencontrent la circonférence en des points A′, B′, C′. On prolonge les cordes A′B′, A′C′, B′C′, qui

coupent respectivement les côtés AB, AC, BC du triangle donné en des points c, b, a; démontrer que les trois points c, b, a sont en ligne droite. (H. Brocard.)

1202. La somme des puissances d'un point quelconque, par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale à quatre fois la puissance du même point par rapport à la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les milieux des diagonales. (Laisant.)

1203. Soient A un ombilic d'une surface du second degré donnée (S), et ρ le second point d'intersection de la normale en ce point avec la surface. On joint un point quelconque m de la surface (S) aux points ρ et A; par ce dernier point et perpendiculairement à la droite Am, on mène un plan qui coupe ρm en un point μ.

Le point μ décrit un plan parallèle aux sections circulaires de la surface (S). (Genty.)

1204. Si une surface du second ordre a pour équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z - 1 = 0,$$

et si cette équation représente deux plans, les coefficients sont liés par les trois relations

$$(1) \qquad M\frac{B'B''}{B} + N\frac{BB''}{B'} + P\frac{BB'}{B''} + 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0,$$

$$(3) \qquad MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1 = 0.$$

Dans ces relations on a posé

$$\frac{1}{M} = A - \frac{B'B''}{B}, \quad \frac{1}{N} = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad \frac{1}{P} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

(V. Hioux.)

1205. Les segments des normales en deux points d'une conique, compris entre ces points et un axe de la courbe, sont vus sous le même angle du point de concours des tangentes en ces points. (Joseph Bruno.)

1206. Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = 0 & \text{ou} & A = 0,\\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4w = 0 & \text{ou} & B = 0,\\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4w = 0 & \text{ou} & C = 0 \end{array}\right.$$

les équations de trois plans.

Si les coefficients a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, ..., sont des fonctions d'un paramètre variable t, le point d'intersection de ces trois plans décrira une courbe.

Démontrer que le plan osculateur de cette courbe au point $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, a pour équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & 2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1\\ a''_2 & b''_2 & c''_2 & 2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2\\ a''_3 & b''_3 & c''_3 & 2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3\\ a''_4 & b''_4 & c''_4 & 2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4\\ 2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0\\ 2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ 2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0\\ 2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

A, B, C sont définis par les équations (1); a'_1, b'_1, c'_1, ...; a''_1, b''_1, c''_1, ..., sont les dérivées premières et les dérivées secondes des coefficients a_1, b_1, c_1, ..., par rapport à t. (Genty).

PERMUTATIONS RECTILIGNES DE $3q$ LETTRES ÉGALES 3 A 3, QUAND 3 LETTRES CONSÉCUTIVES SONT DISTINCTES; CALCUL DE LA FORMULE GÉNÉRALE; APPLICATIONS;

PAR M. A. VACHETTE.

[SUITE (*).]

XI. *Des variétés d'une même espèce; moyen de simplifier le calcul.*

Le nombre $C_{q,3}$ contient le facteur P_q, et le quotient $c_q = \frac{C_{q,3}}{P_q}$ désigne le nombre des variétés; car, si l'on prend une des permutations de cette espèce, les q premières lettres a, b, c,... de chaque série de trois lettres semblables forment une des permutations simples de l'espèce P_q; et, si l'on forme toutes les permutations de cette espèce, en ayant soin que les mêmes systèmes de places soient occupés par trois lettres semblables, on ne change pas la nature de la permutation; les numéros, occupés par trois lettres semblables, demeurent les mêmes; toutes les permutations correspondantes sont comprises dans ce qu'on appellera une même *variété*. Donc

$$C_{q,3} = P_q . c_{q,3}.$$

Tout nombre $N_q(\alpha)$, où α est la désignation du nombre et de l'espèce des intervalles qui entrent dans la permutation, contient en général le facteur $3qP_q$, et le quotient $n_q(\alpha) = \frac{N_q(\alpha)}{3qP_q}$ désigne le nombre des variétés de cette

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 145.

espèce. L'existence du facteur P_q se rencontre pour $N_q(\alpha)$, comme pour $C_{q,3}$; mais, comme on peut ici commencer la permutation par l'une de ses $3q$ lettres, sans changer la variété à laquelle elle appartient, les lettres situées en dehors des intervalles occupant toujours les mêmes systèmes de places par rapport à ces intervalles, le nombre $N_q(\alpha)$ est divisible (*en général*) par $3q$, et $\frac{N_q(\alpha)}{3q\,P_q}$ désigne bien le nombre des variétés. Donc

$$N_q(\alpha) = 3q\,P_q n_q(\alpha).$$

On peut voir sur la formule abrégée (X)

$$C_{q,3} = \tfrac{1}{2}q(3q-7)(3q-8)\,C_{q-1,3} + \frac{q}{q-1}\Sigma,$$

où Σ est une somme de termes de la forme $N_{q-1}(\alpha)$, l'existence du facteur P_q dans $C_{q,3}$; car $C_{q-1,3} = P_{q-1}\,c_{q-1,3}$ et chacun des termes de Σ contient en général le facteur $3(q-1)P_{q-1}$, de sorte que, 6 étant ce que devient Σ quand on le divise par ce facteur,

$$C_{q,3} = \tfrac{1}{2}q(3q-7)(3q-8)\,P_{q-1}c_{q-1} + \frac{q}{q-1}3(q-1)P_{q-1}6$$
$$= \tfrac{1}{2}(3q-7)(3q-8)\,P_q c_{q-1} + 3P_q 6,$$

d'où

$$\frac{1}{3P_q}C_{q,3} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(3q-7)(3q-8)\,c_{q-1} + 6;$$

on écrit simplement c_q ou c_{q-1} au lieu de $c_{q,3}$ et $c_{q-1,3}$.

J'ai dit plus haut *en général*, car il y a des exceptions : $\frac{N_q(\alpha)}{P_q}$ n'est pas toujours divisible par $3q$.

Un premier cas se présente quand α désigne un seul intervalle formant à lui seul la permutation; on n'a à considérer que les deux espèces $N_2(s_6)$ et $N_q(t_{3q})$.

Pour $N_2(s_6) = 2$ (IV), on a vu qu'elle ne contenait qu'une variété symétrique de fraction $\frac{1}{6}$; d'où

$n_2(s_6) = \frac{N_2(s_6)}{6P_2} = \frac{1}{6}$. Pour $N_q(t_{3q}) = 3P_q$, il n'y a qu'une variété symétrique de fraction $\frac{1}{q}$ (IV), d'où $n_q(t_{3q}) = \frac{N_q(t_{3q})}{3qP_q} = \frac{1}{q}$, et en particulier $n_3(t_9) = \frac{1}{3}$.

Un deuxième cas se présente quand α désigne plusieurs intervalles, et que la permutation peut se partager en x groupes, tous composés de la même manière, ce qui n'a souvent lieu que pour certaines variétés de l'espèce $N_q(\alpha)$; x est inférieur ou au plus égal à q et diviseur de P_q. L'une de ces variétés donnera $\frac{3qP_q}{x}$ permutations et ne comptera que pour $\frac{1}{x}$ dans le nombre $n_q(\alpha)$; d'ailleurs, dans ce cas, α contient souvent plusieurs intervalles identiques de composition, et, en étudiant le nombre des variétés par rapport à l'un des intervalles, on divise le nombre trouvé par le nombre des intervalles.

On peut croire que la formule est illusoire pour $q = 3$; mais on a

$$\tfrac{2}{3}C_{3,3} = 2N_2(s_6), \quad \text{d'où} \quad C_{3,3} = 6 = P_3,$$

ce que l'on vérifie directement; on a la seule variété

abcabcabc,

et par suite $c_8 = 1$.

En développant le 6 qu'on a écrit plus haut, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{3P_q}C_{q,3} = {} & \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}(3q-7)(3q-8)C_{q-1} + n_{q-1}(t_{10}) + 2n_{q-1}(t_9) \\ & + 2n_{q-1}(t'_9) + 4n_{q-1}(t_8) + 4n_{q-1}(t'_8) + (3q-7)n_{q-1}(p_7) \\ & + (6q-16)n_{q-1}(p_6) + (9q-25)n_{q-1}(p_5) \\ & + (3q-7)n_{q-1}(s_6) + (6q-16)n_{q-1}(s_5) \\ & + \tfrac{1}{2}(3q-5)(3q-8)n_{q-1}(s_4) + (3q-7)(3q-8)n_{q-1}(s_3) \\ & + n_{q-1}(p_7, s_4) + 2n_{q-1}(p_7 s_3) + 2n_{q-1}(p_6 s_4)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3\,P_q}\,C_{q,3} = +4n_{q-1}(p_6 s_3) + 3n_{q-1}(p_5 s_4) + 6n_{q-1}(p_5 s_3) + n_{q-1}(s_6 s_4)$$

(suite) $$+ 2n_{q-1}(s_6 s_3) + 2n_{q-1}(s_5 s_4) + 4n_{q-1}(s_5 s_3)$$
$$+ (3q-7)\,n_{q-1}(2s_4) + (6q-16)\,n_{q-1}(s_4 s_3)$$
$$+ (12q-36)\,n_{q-1}(2s_3) + n_{q-1}(2s_3)_0$$
$$+ n_{q-1}(3s_4) + 2n_{q-1}(2s_4 s_3) + 4n_{q-1}(s_4\,2s_3) + 8n_{q-1}(3s_3).$$

Dans les formules qu'on pourra établir pour les calculs des espèces $N_q(\alpha)$, on calculera ordinairement le nombre des variétés $n_q(\alpha)$, ce qui simplifie l'écriture.

XII. *Décomposition des* $B_{3,3}$; *valeurs de* $C_{4,3}$ *et* c_4.

On a trouvé

$$B_{3,3} = 22\,P_3\;(\qquad).$$

On a trouvé

$$C_{3,3} = P_3 \quad \text{et} \quad c_3 = 1\;(\text{XI}).$$

Dans les espèces à un intervalle, il n'existe que $N_3(t_9) = 3\,P_3$, d'où $n_3(t_9) = \frac{1}{3}$.

Dans les espèces à deux intervalles, il n'existe que :

1° $N_3(p_5, s_4)^c = 9\,P_3$(IV); abaca et bcbc sont complémentaires; d'où $n_3(p_5, s_4) = 1$.

2° $N_3(2s_3)_0 = 9\,P_3$; il n'y a qu'une seule variété asymétrique

aba cbc abc,

d'où $\frac{1}{3.3\,P_3}\,N_3(2s_3)_0 = 1$, et par suite $n_3(2s_3)_0 = 1$; et d'ailleurs $n_3(2s_3) = 1$.

On verrait directement qu'il n'y a point d'autres espèces; mais la décomposition est maintenant complète, car

$$C_{3,3} + N_3(t_9) + N_3(2s_3)_0 + N_3(p_5, s_4)$$
$$= P_3 + 3\,P_3 + 9\,P_3 + 9\,P_3 = 22\,P_3 = B_{3,3}.$$

Si l'on applique la formule $C_{q,3}$ (XI) pour $q = 4$, et qu'on prenne $n_3(t_9)$ au lieu de $2n_3(t_9)$ (V et VII), on

aura

$$\frac{1}{3P_4}C_{4,3} = \tfrac{1}{3}10c_3 + n_3(t_9) + 3n_3(p_5 s_4) + 12n_3(2s_3) + n_3(2s_4) = \tfrac{1}{3}10 + \tfrac{1}{3} + 3 + 12 + 1 = 19 + \tfrac{2}{3}.$$

$$C_{4,3} = 59P_4 \quad \text{et} \quad c_4 = 59.$$

XIII. *Décomposition des espèces à plusieurs intervalles, quand il y a lieu.*

1° Sept de ces espèces sont indécomposables :

$N_q(p_7 s_4)$;	$\underline{ababcbc}$	et	$\underline{dede}$,	$q \geqq 5$,
$N_q(s_6 s_4)$;	$\underline{ababab}$	et	$\underline{cdcd}$,	$q \geqq 5$,
$N_q(s_6 s_3)$;	$\underline{ababab}$	et	$\underline{cdc}$,	$q \geqq 5$,
$N_q(s_5 s_4)$;	$\underline{ababa}$	et	$\underline{cdcd}$,	$q \geqq 4$,
$N_q(3 s_4)$;	$\underline{abab}$, $\underline{cdcd}$	et	$\underline{efef}$,	$q \geqq 6$,
$N_q(2 s_4)$;	$\underline{abab}$, $\underline{cdcd}$	et		$q \geqq 4$.

2° Six se décomposent en deux espèces $N_q(p_7, s_3)$; avec le p_7, $\underline{ababcbc}$, s_3 a, ou non, une lettre commune, de sorte qu'il entre quatre ou cinq lettres distinctes dans les deux intervalles, ce qu'on indique par l'exposant 4 ou 5 donné à la parenthèse. On aura

$$\left.\begin{matrix} N_q(p_7, s_3)^4 \\ N_q(p_7, s_3)^5 \end{matrix}\right\} \underline{ababcbc} \text{ avec } \left\{\begin{matrix} \underline{dad} \text{ ou } \underline{dcd} \\ \underline{ded} \end{matrix}\right\}; \; q \geqq 5;$$

la première est à variétés réciproques.

$N_q(p_6, s_4)$, avec le p_6, $\underline{abacac}$ ou $\underline{cacaba}$, s_4 a, ou non, une lettre commune; on a deux espèces à variétés réciproques :

$$\left.\begin{matrix} N_q(p_6, s_4)^4 \\ N_q(p_6, s_4)^5 \end{matrix}\right\} \underline{abacac} \text{ ou } \underline{cacaba} \text{ avec } \left\{\begin{matrix} \underline{bdbd} \text{ ou } \underline{dbdb}, & q \geqq 4, \\ \underline{dedc}, & q \geqq 5. \end{matrix}\right.$$

$N_q(s_5, s_3)$; avec le s_5, $\underline{ababa}$, s_3 a, ou non, une lettre

commune :

$$\left.\begin{array}{l} N_q(s_5, s_3)^3 \\ N_q(s_5, s_3)^4 \end{array}\right\} \underline{ababa} \text{ avec } \left\{\begin{array}{c} \underline{cbc} \\ \underline{cdc} \end{array}\right\};\ q \geqslant 5.$$

$N_q(s_4, s_3)$; avec le s_4, $\underline{abab}$, s_3 a, ou non, une lettre commune :

$$\left.\begin{array}{l} N_q(s_4 s_3)^3 \\ N_q(s_4 s_3)^4 \end{array}\right\} \underline{abab} \text{ avec } \left\{\begin{array}{c} \underline{cbc} \text{ ou } \underline{cac} \\ \underline{cdc} \end{array}\right\};\ q \geqslant 4,$$

la première est à variétés réciproques.

$N_q(2s_3)_0$; avec $\underline{aba}$, le s_3 consécutif est $\underline{cbc}$ ou cdc; dans le premier cas, ils ont même médiane, ce qu'on indique par $2s_3m_1$:

$$\begin{array}{llll} N_q(2s_3m_1)_0 & \underline{aba}\ \underline{cbc} & q=3, & q=4 \text{ manque}, \\ N_q(2s_3)_0^4 & \underline{aba}\ \underline{cdc} & & q \geqslant 4, \end{array}$$

$2s_3m_1$ indique suffisamment qu'il n'y a que trois lettres distinctes.

$N_q(2s_4, s_3)$; avec l'un des deux s_4, $\underline{dbab}$ et $\underline{cdcd}$, s_3 a, ou non, une lettre commune :

$$\left.\begin{array}{l} N_q(2s_4, s_3)^5 \\ N_q(2s_4, s_3)^6 \end{array}\right\} \underline{abab}, \underline{cdcd} \text{ avec } \left\{\begin{array}{ll} \underline{eae}, \text{ ou } \underline{ebe}, \underline{ece}, \underline{ede}, & q \geqslant 5, \\ \underline{efe} & q \geqslant 6, \end{array}\right.$$

la première est à variétés réciproques.

3° Une espèce se décompose en trois $N_q(p_5 s_4)$, selon que s_4 a deux lettres communes avec p_5, une seule ou aucune :

$$\begin{array}{llll} N_q(p_5 s_4)^3, & \underline{bcbc}, \text{ ou } \underline{cbcb}, & q=3,\ q=4 \text{ et } q=5 \text{ manquent}, & \\ N_q(p_5 s_4)^4, & \underline{abaca} \text{ avec } \underline{bdbd}, \text{ ou } \underline{dbdb}, & \underline{cdcd}, \underline{dcdc}, & q \geqslant 4, \\ N_q(p_5 s_4)^5 & \text{»} \quad \underline{dede} & \text{»} & q \geqslant 5; \end{array}$$

la première a ses deux intervalles complémentaires et peut être désignée par $N_q(p_5 s_3)^c$; les deux premières sont à variétés réciproques.

4° Deux se décomposent en quatre espèces.

$N_q(p_5 s_3)$; avec le p_5, $\underline{abaca}$, s_3 peut avoir deux lettres communes, une seule extrême ou médiane de s_3, aucune :

$$\left.\begin{array}{l} N_5(p_5 s_3)^3 \\ N_5(p_5 s_3)^4 m_3 \\ N_5(p_5 s_3)^4 m_2 \\ N_5(p_5 s_3)^5 \end{array}\right\} \underline{abaca} \text{ avec } \left\{\begin{array}{lll} \underline{bcb} \text{ ou } \underline{cbc}, & q \geqslant 5, \\ \underline{bdb} \text{ ou } \underline{cdc}, & q \geqslant 4, \\ \underline{dbd} \text{ ou } \underline{dcd}, & q \geqslant 4, \\ \underline{dcd} & q \geqslant 5. \end{array}\right.$$

Les notations m_3 et m_2, placées après la parenthèse, signifient que p_5 et s_3 ont trois ou deux médianes distinctes.

$N_q(2s_3)$; avec $\underline{aba}$, le second s_3 est $\underline{bab}$, $\dfrac{bcb}{\underline{eac}}$, $\underline{cbc}$, $\underline{cdc}$; on aura

$$N_q(2s_3)^c, \quad q \geqslant 5,$$
$$N_q(2s_3^3\, m_2), \quad \underline{aba} \text{ avec } \underline{bcb} \text{ ou } \underline{cac};$$

il y a trois lettres distinctes, ce qu'indique la notation $2s_3^3$ et deux médianes distinctes : elle est à variétés réciproques; $q \geqslant 4$:

$$N_q(2s_3 m_1), \quad q \geqslant 3,$$
$$N_q(2s_3)^4, \quad q \geqslant 4.$$

5° Une espèce se décompose en cinq, $N_q(p_6, s_3)$, à variétés réciproques :

$$N_q(p_6 s_3)^c, \quad \dfrac{abacac}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{bcb}, \quad q \geqslant 6,$$

$$N_q(p_6 s_3)\, m_1, \quad \dfrac{abacac}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{dbd},$$

il y a même médiane; $q \geqslant 4$:

$$N_q(p_6 s_3)^4 m_2^3, \quad \dfrac{abacac}{\underline{cacaba}} \text{ avec } \underline{bdb},$$

deux médianes différentes et trois lettres intérieures distinctes b, c, d, d'où la notation m_2^3 ; $q \leqslant 5$:

$$N_q(p_6 s_3)^4 m_2^2, \quad \frac{abacac}{\underline{cacaba}} \quad \text{avec} \quad \underline{dcd},$$

deux médianes différentes et deux lettres intérieures distinctes b, c, d'où la notation m_2^2 ; $q \geqslant 5$:

$$N_q(p_6 s_3)^5, \quad \frac{abacac}{\underline{cacaca}} \quad \text{avec} \quad \underline{ded}; \ q \geqslant 5.$$

6° L'espèce $N_q(s_4, 2s_3)$ se décompose en sept :

$$\left.\begin{array}{l} N_q(s_4,\ 2s_3)^c \\ N_q(s_4,\ 2s_3^3 m_2)^4 \\ N_q(s_4,\ 2s_3^4)^4 \\ N_q(s_4,\ 2s_3^3 m_2)^5 \\ N_q(s_4,\ 2s_3 m_1) \\ N^q(s_4,\ 2s_3^4)^5 \\ N_q(s_4,\ 2s_3)^6 \end{array}\right\} \underline{abab} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} \underline{cdc},\ \underline{dcd};\ q \geqslant 4, \\ \frac{cac,}{\underline{cbc},}\ \underline{dbd};\ q \geqslant 4, \\ \underline{cac},\ \underline{dbd};\ q \geqslant 4, \\ \underline{cdc},\ \underline{ded};\ q \geqslant 5, \\ \underline{cdc},\ \underline{ede};\ q \geqslant 5, \\ \frac{cac,}{\underline{cbc},}\ \underline{ded};\ q \geqslant 5, \\ \underline{cdc},\ \underline{efe};\ q \geqslant 6. \end{array}\right.$$

7° L'espèce $N_q(3s_3)$ se décompose en huit :

$$N^q(3s_3)^c; \quad \underline{aba}, \underline{bcb} \text{ et } \underline{cac};\ q \geqslant 4,$$

$$N_q(2s_3^c s_3); \quad \underline{aba}, \underline{bab} \text{ et } \underline{cdc};\ q \geqslant 5,$$

$$N_q(3s_3 m_1); \quad \underline{aba}, \underline{cbc}, \quad \underline{dbd};\ q \geqslant 4,$$

$$N_q(3s_3^4 m_2); \quad \underline{aba}, \underline{cbc}, \text{ et } \frac{dad}{\underline{dcd}};$$

il y a quatre lettres distinctes et deux médianes différentes ; $q \geqslant 4$:

$$N_q(2s_3^3 m_2, s_3)^4 m_3; \quad \underline{aba}, \underline{bcb} \quad \text{et} \quad \frac{dad}{\underline{cdc}};$$

quatre lettres distinctes et trois médianes différentes. On voit que $\underline{aba}$, $\underline{bcb}$, $\underline{dad}$ donnent la même espèce que $\underline{aba}$, $\underline{bcb}$, $\underline{cdc}$ ou $\underline{bcb}$, $\underline{cdc}$, $\underline{aba}$; dans la première suite, la médiane c n'entre qu'une fois comme lettre, et dans la deuxième suite, c'est la médiane d; $q \geqq 4$:

$$N_q(2s_3^3\, m_2, s_3)^5;\quad \underline{aba},\ \underline{bcb},\ \underline{dcd};\quad q \geqq 5,$$

$$N_q(2s_3\, m_1, s_3)^5;\quad \underline{aba},\ \underline{cbc},\ \underline{dcd};\quad q \geqq 5,$$

$$N_q(3s_3)^6;\quad \underline{aba},\ \underline{cdc},\ \underline{efe};\quad q \geqq 6.$$

XIV. *Calcul direct de ces espèces pour $q = 4$, valeurs de $C_{5,3}$ et de c_5.*

On ne calculera que les nombres de variétés.

1° Termes à un intervalle.

On voit aisément que $n_4(s_5)$, $n_4(s_6)$, $p_4(p_6)$, $n_4(p_7)$ n'existent pas; par exemple, avec le p_6, $\underline{a\,bac\,ac}$, on ne peut associer utilement les six lettres bb, c, ddd.

$n_4(t_{10})$, $n_4(t_9)$, $n_4(t'_9)$, $n_4(t_8)$ et $n_4(t'_8)$ n'existent pas plus que $n_3(p_7)$, $n_3(s_6)$, $n_3(p_6)$, $n_3(s_5)$ et $n_3(p_5)$, auxquels ils se ramènent.

$n_4(p_5) = 2 \quad \underline{abaca}\, d^{bc}_{\cdot\cdot}\, d^{bc}_{\cdot\cdot}\, d,$

$n_4(s_4) = 2 \quad \underline{abab}\, cd^{a}_{\cdot}\, cd^{b}_{\cdot}\, cd,$

$n_4(s_3) = 16$	$\underline{aba}$	$cb\, d^{a,\,b,}_{\cdot\ \cdot}\, d^{c,\,c,}_{\cdot\ \cdot}\, d$		4
		$cd\, a^{bcd\ bcd}$		3
		$cd\, b$	$a^{cd}\, b^{cd}$	2
			$c^{d\,abcd}$	7
				16

2° Termes à deux intervalles; on a vu (XIII) ceux qui existent pour $q = 4$:

$n_4(s_5 s_4) = 2$	$\underline{ababa}\ \underline{cdcd}\ acd$	1
	La réciproque......	1
		2

$n_4(p_6, s_4) = 2$. Il n'y a que la subdivision $n_4(p_6, s_4)^4$,

a bac ac dbdb cd.	1
La réciproque.	1
	2

$n_4(s_4 s_3) = 12 = n^4(s_4 s_3)^3 + n_4(s_4 s_3)^4 = 4 + 8$,

abab d cbc dacd.	1
d cad cbc d.	1
	2
Les réciproques.	2
	4
abab cdc, $^a d^{bc} d$.	3
da cdc bdc.	1
Les réciproques.	4
	8

$n_4(p_5, s_4) = 2$; il n'y a qu'une subdivision $n_4(p_5 s_4)^4$,

abaca b dcdc bd.	1
La réciproque.	1
	2

$n_4(p_5 s_3) = 6 = n_4(p_5 s_3)^4 m_3 + n_4(p_5 s_3)^4 m_2 = 4 + 2$,

abaca dc bdb cd.	1
La réciproque.	1
	2
abaca dbd cbdc.	1
dbc dbd c.	1
	2
Les réciproques.	2
	4

$n_4(2 s_3) = 24 = n_4(2 s_3^3 m_2) + n_4(2 s_3 m_1) + n_4(2 s_3)^4$
$= 4 + 7 + 13$,

et en même temps

$n_4(2s_4)_0 = 7,$

$\underline{aba}\ d\ \underline{bcb}\ dcadc$	1	
$cd\ \underline{bcb}\ dacd$	1	
	2	
Les réciproques.....	2	
	4	
$\underline{aba}\ d\ \underline{cbc}^{d\,abcd}$	7	
$\underline{aba}\ \underline{cdc}\ a\ bd\ cbd$	1	
$b^{d\,abcd}$	6	
$\underline{aba}\ db\ \underline{cdc}^{abcd}$	5	
$\underline{aba}\ dba\ \underline{cdc}\ bdc$	$\frac{1}{2}$	Ce sont des variétés symétriques de fraction $\frac{1}{2}$.
$cdb\ \ abd$	$\frac{1}{2}$	
	13	

$n_4(p_6 s_3) = 4$; il n'y a qu'une subdivision $n_4(p_6 s_3) m_1$,

$\underline{a\ bac\ ac}\ \underline{dbd}\ cbd$....	1
$dbc\ \underline{dbd}$....	1
	2
Les réciproques...	2
	4

$n_4(2s_4) = \frac{11}{2}$

$\underline{abab}\ \underline{cdcd}^{abcd}$....	5	
$\underline{abab}\ da\ \underline{cdcd}\ bc$....	$\frac{1}{2}$	Variété symétrique de fraction $\frac{1}{2}$.
	$5 + \frac{1}{2}$	

3° Termes à trois intervalles :

$$n_4(s_4, 2s_3) = 8 = n_4(s_4, 2s_3^6) + n_4(s_4, 2s_3^3 m_2)^4 + n_4(s_4, 2s_3^4)^4$$
$$= 2 + 4 + 2,$$

$\underline{aba}^{cd}_{..}\ \underline{bab}\ \underline{cdcd}$ 2

$\underline{aba}\ d\ \underline{bcb}\ a \left| \begin{array}{l} \underline{cdcd} \ldots \\ \underline{dcdc} \end{array} \right.$ 2

Les réciproques. . . . 2

$\overline{4}$

$\underline{aba}\ \underline{cdc}\ a \left| \begin{array}{l} \underline{bdbd} \\ \underline{dbdb} \end{array} \right| c..$ 2

$$n_4(3s_3) = 10 = n_4(3s_3)^c + n_4(2s_3^3 m_2, s_3)^4 m_3$$
$$+ n^4(3s_3^4 m_2) + n_4(3s_5 m_1) = \tfrac{2}{3} + 2 + 6 + \tfrac{4}{3}$$

$\underline{aba}\ d\ \underline{bcb}\ d\ \underline{cac}\ d$ . . . . . $\frac{1}{3}$ ⎫ Variétés symétriques de fraction $\frac{1}{3}$.

La réciproque. . . . . $\frac{1}{3}$ ⎭

$\overline{\tfrac{2}{3}}$

$\underline{aba}\ d\ \underline{bcb}\ da\ \underline{cdc}$ 1

La réciproque. 1

$\overline{2}$

$\underline{aba}^{cd}_{..}\ a\ \underline{bcb}\ \underline{dcd}$ 2

$cd\ \underline{bcb}\ a\ \underline{dcd}$ 1

$\overline{3}$

Les réciproques. . . 3

$\overline{6}$

$\underline{aba}\ \underline{cbc}\ \underline{dbd}\ acd$ 1

$\underline{aba}\ d\ \underline{cbc}\ a\ \underline{dbd}\ c$ . . . . . $\frac{1}{3}$ ⎨ Variété symétrique de fraction $\frac{1}{5}$.

$\overline{\tfrac{4}{3}}$

4° La formule $C_{q,3}$, si l'on y fait $q = 5$, donne

$$\frac{1}{3\,P_5} C_{5,3} = \tfrac{1}{3}\,\big[28c_4 + 20n_4(p_5) + 35n_4(s_4) + 56n_4(s_3)$$
$$+ 2n_4(p_6 s_4) + 4n_4(p_6 s_3) + 3n_4(p_5 s_4)$$
$$+ 6n_4(p_5 s_3) + 2n_4(s_5 s_4) + 8n_4(2s_4)$$
$$+ 14n_4(s_4 s_3) + 24n_4(2s_3) + n_4(2s_3)_0$$
$$+ 4n_4(s_4, 2s_3) + 8n_4(3s_3)\big];$$

substituant $c_4 = 59$, et tous les nombres qu'on vient de calculer :

$$\begin{aligned}\frac{1}{3P_5}C_{5,3} &= \tfrac{1}{3}28.59 + 20.2 + 35.2 + 56.16 + 2.2 + 4.4 \\ &\quad + 3.2 + 6.6 + 2.2 + 8.\tfrac{11}{2} + 14.12 + 24.24 \\ &\quad + 7 + 4.8 + 8.10 \\ &= \tfrac{1}{3}.1652 + 40 + 70 + 896 + 4 + 16 + 6 + 36 \\ &\quad + 4 + 44 + 168 + 576 + 7 + 32 + 80 \\ &= \tfrac{1}{3}.1652 + 1979.\end{aligned}$$

$$C_{5,3} = P_5(1652 + 3.1979) = P_5(1652 + 5937) = P_5.7589,$$
$$c_5 = 7589,$$

résultat que j'ai vérifié directement.

SUR LA RELATION DE MÖBIUS, QUI EXPRIME QUE QUATRE POINTS D'UN PLAN SONT SITUÉS SUR UN CERCLE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Möbius a obtenu le premier, à l'aide des principes du calcul barycentrique (*Journal de Crelle*, t. 16, p. 26), la relation qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. M. Cayley a obtenu le même résultat à l'aide de la théorie des déterminants; on peut interpréter et généraliser le théorème en question de la manière suivante.

Désignons par

$$X_i = x^2 + y^2 - 2a_i x - 2b_i y + c_i$$

le premier membre de l'équation d'un cercle en coordonnées rectangulaires; on sait que c_i et X_i représentent respectivement la puissance de l'origine et d'un point quelconque du plan dont les coordonnées sont x et y,

par rapport à ce cercle. On déduit, des quatre équations

$$x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + c_1 - X_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + c_2 - X_2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2a_3 x - 2b_3 y + c_3 - X_3 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 2a_4 x - 2b_4 y + c_4 - X_4 = 0,$$

par l'élimination linéaire de x, y et de x^2+y^2, l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 - X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 - X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 - X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 - X_4 \end{vmatrix} = 0,$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & X_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & X_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & X_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & X_4 \end{vmatrix}.$$

Cette dernière équation est l'expression analytique du théorème suivant :

Théorème. — *Si par les centres de quatre cercles situés dans un plan on élève des perpendiculaires au plan, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport aux quatre cercles, le volume du tétraèdre formé par les extrémités de ces perpendiculaires est constant.*

Si les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, le centre de ce cercle a la même puissance par rapport aux quatre cercles, et le tétraèdre correspondant a un volume nul, puisque ses sommets sont dans un plan parallèle au plan considéré. Donc :

Théorème. — *Pour que quatre cercles soient orthogo-*

naux à un même cercle, il faut que les extrémités des perpendiculaires, menées au plan par les centres de ces cercles, respectivement proportionnelles aux puissances d'un point quelconque du plan par rapport à ces quatre cercles, soient situées dans un même plan.

On obtient la condition pour que quatre points d'un plan soient situés sur un cercle en supposant que les quatre cercles du théorème précédent se réduisent à leurs centres.

SUR UN PROBLÈME DE HALLEY RELATIF A LA THÉORIE DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Le problème de Halley, qui consiste dans la détermination de l'orbite d'une planète connaissant trois positions héliocentriques, revient géométriquement à déterminer une conique connaissant un foyer et trois points. Il existe un grand nombre de solutions de ce problème, et notamment celle de *Nicollic,* qui est indiquée dans le *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique* de M. Catalan (t. Ier, p. 470).

La méthode suivante nous paraît nouvelle et revient à ce problème bien connu de Géométrie descriptive : *Trouver la trace horizontale d'un plan dont on connaît les projections de trois points.*

Prenons, en effet, pour origine des coordonnées rectangulaires le foyer de la conique; désignons par r, r_1, r_2, r_3 les distances d'un point quelconque de la conique cherchée et des trois points donnés à ce foyer, et par

$$lx + my + n = 0$$

l'équation de la directrice.

On a, par définition, pour l'équation de la conique

$$x^2 + y^2 = (lx + my + n)^2,$$

et, par suite, les équations

$$\pm r = lx + my + n,$$
$$\pm r_1 = lx_1 + my_1 + n,$$
$$\pm r_2 = lx_2 + my_2 + n,$$
$$\pm r_3 = lx_3 + my_3 + n.$$

On obtient, par l'élimination de l, m, n, l'équation de la conique cherchée sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \pm r & x & y & 1 \\ \pm r_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ \pm r_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ \pm r_3 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient O_1, O_2, O_3 les trois points donnés, O un point quelconque de la conique, et F le foyer ; si l'on mène hors du plan des droites OP, O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3 parallèles à une direction quelconque prise pour axe des r, et respectivement proportionnelles à OF, O_1F, O_2F, O_3F, il résulte immédiatement de l'équation précédente que les points P, P_1, P_2, P_3 sont situés dans un même plan ; de plus, on obtient l'équation de la directrice en remplaçant r par zéro ; on a ainsi la proposition suivante :

Théorème. — *Si en chacun des points d'une conique on mène hors du plan des parallèles à une direction quelconque et dont les longueurs soient respectivement proportionnelles aux rayons focaux correspondants, les extrémités de ces parallèles seront situées (sur une conique) dans un plan passant par la directrice.*

Ce théorème, qu'il est facile de démontrer géométri-

quement, subsiste en remplaçant le foyer par un cercle focal, le rayon focal par la puissance du point par rapport à ce cercle et la directrice par la corde de contact.

Inversement, connaissant trois points et un cercle focal d'une conique, si l'on élève, en chacun de ses points et perpendiculairement au plan, des droites respectivement proportionnelles à la racine carrée de la puissance de ces points par rapport au cercle focal, le plan passant par les extrémités de ces droites rencontrera le plan du cercle focal suivant la corde de contact correspondante. L'indétermination du signe de la racine carrée donne ainsi quatre solutions et, dans le cas particulier du problème de Halley, trois hyperboles au moins.

Le théorème précédent permet encore de ramener la recherche des sécantes communes de deux coniques confocales (ayant un seul foyer commun) au problème de Géométrie descriptive relatif à l'intersection de deux plans donnés.

Soient, en effet, F, D, P le foyer, la directrice et un point de la première conique; D', P' la directrice et un point de la seconde.

Élevons en P une perpendiculaire au plan PQ, égale à PF, et en P' une perpendiculaire P'Q' égale à P'F; la projection de l'intersection des deux plans menés par Q et D et par Q' et D' sur le plan des deux coniques représentera l'une des cordes communes; on obtiendra l'autre en portant les deux perpendiculaires dans des sens différents.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1874).

COMPOSITION D'OCTOBRE.

Par M. P. BARBARIN,
Élève en mathématiques spéciales au lycée Henri IV (*).

Étant donnés un cercle O, *un diamètre fixe* AB *de ce cercle et une corde* CD *parallèle à une direction déterminée, on demande :*

1° *L'équation générale des hyperboles équilatères passant aux quatre points* A, B, C, D;

2° *Le lieu des points de contact des tangentes à ces hyperboles, perpendiculaires à la direction fixe;*

3° *Le lieu des sommets du lieu précédent, qui est une conique, quand la direction donnée varie.*

1° En prenant pour origine des coordonnées rectangulaires le centre O du cercle donné et pour axe des x le diamètre $AB = 2R$, l'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Et, si a désigne le coefficient angulaire de la direction donnée, la corde CD est représentée par l'équation

$$y - ax - b = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation générale des coniques passant aux quatre points A, B, C, D est

$$x^2 + y^2 - R^2 + \lambda(y - ax - b)y = 0.$$

Pour que cette dernière équation soit celle d'une hy-

(*) M. P. Barbarin est maintenant élève à l'École Normale supérieure.

perbole équilatère, il faut et il suffit que

$$1 + \lambda = -1, \quad \text{d'où} \quad \lambda = -2;$$

donc l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent par les quatre points A, B, C, D est

$$(1) \qquad x^2 - y^2 + 2axy + 2by - R^2 = 0.$$

2° Les points de contact des tangentes à ces hyperboles, perpendiculaires à la direction fixe, appartiennent au diamètre qui a pour équation

$$x + ay - \frac{1}{a}(-y + ax + b) = 0$$

ou

$$(2) \qquad (a^2 + 1)y - b = 0.$$

En éliminant b entre les équations (1) et (2), il vient

$$(3) \qquad x^2 + (2a^2 + 1)y^2 + 2axy - R^2 = 0.$$

C'est l'équation du lieu des points de contact; elle représente une ellipse, ayant son centre à l'origine et passant aux points A, B.

3° Les axes sont déterminés par l'équation

$$(4) \qquad y^2 - 2axy - x^2 = 0.$$

L'élimination de a entre (3) et (4) conduit à l'équation du lieu des sommets de l'ellipse, quand la direction donnée varie.

L'équation (4) donne

$$a = \frac{y^2 - x^2}{2xy};$$

en portant cette valeur dans l'équation (3), on a

$$x^2 + \left[\frac{(x^2 - y^2)^2}{2x^2y^2} + 1\right]y^2 + \frac{y^2 - x^2}{xy}xy - R^2 = 0,$$

d'où

$$2x^4 + x^4 + y^4 + 2x^2(y^2 - x^2) - 2R^2x^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2R^2x^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu cherché. On voit qu'elle se dédouble en celles de deux cercles

$$x^2 + y^2 + Rx\sqrt{2} = 0,$$

$$x^2 + y^2 - Rx\sqrt{2} = 0,$$

tangents à l'axe des y, à l'origine, ayant leurs centres sur l'axe des x et dont les rayons sont égaux à $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

BIBLIOGRAPHIE.

Eléments de Géométrie, comprenant des notions sur les courbes usuelles, par F. I. C. Un vol. in-12, de 396 pages. Deuxième édition; 1875 (*).

On vient de nous communiquer un petit livre, de 400 pages cependant, que nous avons lu et relu avec intérêt. Il fait partie du *Cours de Mathématiques élémentaires* publié par le Frère Irlide Cazaneuve et traite de la Géométrie.

L'Ouvrage, comme l'indique son titre, se compose de deux Parties distinctes : 1° la Géométrie proprement dite, répartie dans sept Livres ou divisions, est due à la plume exercée du Frère René, ancien Directeur de l'École normale d'Aurillac, actuellement Directeur du Secrétariat général de l'Institut des Écoles chrétiennes ; 2° le VIIIe Livre, traitant des courbes usuelles, a été rédigé, ainsi que

(*) Chez les éditeurs : Tours, Alfred Mame et fils, imprimeurs-libraires; Paris, Poussielgue frères, rue Cassette, 27.

l'Appendice, par le Frère Gabriel Marie, Directeur du pensionnat Notre-Dame-de-France, au Puy.

Ce Traité, simple mais complet, est remarquable autant par la nature et l'ordre des matières que par la méthode de l'exposition et les applications immédiates de la science de l'étendue. Le mode de division, la graduation des articles, la substance du texte et le choix pratique des exemples dénotent chez les auteurs une grande et longue habitude de l'enseignement, ainsi qu'une connaissance réfléchie et approfondie de la science qu'ils exposent.

Passons à l'examen des détails de l'Ouvrage.

En ouvrant le volume, on est immédiatement frappé du dessin des figures qui, intercalées dans le texte, sont tracées avec des traits fins et des lignes pleines et présentent des parties nettes et des surfaces grisées. Cette disposition met en évidence dans le plan l'objet de la proposition, et met en relief dans l'espace les solides soumis à l'étude; l'œil saisit immédiatement les contours de ceux-ci et en pénètre les profondeurs.

Une concordance complète se trouve établie entre les théorèmes de la Géométrie plane et ceux de l'espace qui leur correspondent. Ainsi les cas d'égalité et de similitude des triangles, des trièdres et des tétraèdres sont mis entièrement en harmonie.

Les divisions de la Géométrie plane sont les mêmes que dans *Legendre*. Dans la Géométrie de l'espace, tout ce qui concerne les trois corps ronds se trouve réuni dans un seul et même Livre, qui est le septième de ces *Éléments*. Le huitième et dernier Livre donne les notions sur les courbes usuelles.

Les polygones réguliers sont étudiés à la fin du second Livre, après la mesure des angles. On a eu soin d'y donner quelques développements à la construction des poly-

gones réguliers étoilés, si fréquemment employés dans les arts professionnels.

Dans le paragraphe qui traite des relations numériques entre les côtés d'un triangle, on a cru devoir introduire quelques notions sur les fonctions circulaires, en considérant ces lignes comme les rapports entre les côtés du triangle rectangle. Cette innovation peut avoir son utilité pour les personnes qui, étrangères à la Trigonométrie, sont appelées à faire usage des formules qui en contiennent les lignes.

La surface du triangle en fonction des trois côtés est évaluée à l'aide de la hauteur. A la suite se trouve établie la formule de *Poncelet*, qui donne l'aire du trapèze mixtiligne formé par une courbe, les ordonnées extrêmes et la différence des abscisses. La démonstration en est très-simple et repose exclusivement sur la mesure du trapèze rectiligne birectangle. Les formules de *Simpson* et de M. *Sauvage*, qui atteignent le même but, se trouvent rejetées à la fin du VIIIe Livre.

Les deux derniers Livres méritent de fixer particulièrement l'attention du lecteur; ils contiennent un certain nombre de théorèmes nouveaux ou peu connus, et se recommandent surtout par les démonstrations simples et originales, au moyen desquelles les auteurs sont parvenus à transporter dans les *Éléments* des théories qu'on croyait naturellement placées au-dessus de leur domaine.

Dans le VIIe Livre, nous trouvons (pages 230 et 238) deux remarquables thécrèmes des trois corps ronds, qui complètent celui d'Archimède, et dont voici les énoncés :

Étant donnés une sphère, un cylindre circonscrit à cette sphère et un cône à deux nappes inscrit dans le cylindre :

1° *Si l'on mène un plan quelconque perpendiculaire*

à l'axe, la section de la sphère est égale à la différence entre les deux sections du cylindre et du cône;

2° *Si l'on mène deux plans perpendiculaires à l'axe, le segment sphérique compris entre ces deux plans est égal à la différence entre les segments correspondants du cylindre et du cône.*

Ces théorèmes ne s'appliquent pas seulement à la sphère, ils s'étendent à l'ellipsoïde, à l'hyperboloïde et au paraboloïde, qui sont de révolution autour de l'axe commun du cylindre circonscrit et du cône à deux nappes inscrit dans le cylindre; ils permettent d'appliquer à la sphère, ainsi qu'à ces corps de révolution, le célèbre théorème de *Thomas Simpson*, qui fournit le volume de tout corps compris entre deux bases parallèles et terminé latéralement par des plans de direction quelconque. On en trouve les développements page 246,... et 354,....

Les théorèmes des trois corps sont suivis de la méthode *centrobarique* de *Pappus*, retrouvée par *Guldin*.

Le volume du segment sphérique est aussi donné en valeur de la hauteur et de la section équidistante des deux bases. Cette expression, plus simple que la formule ordinaire, repose sur une propriété qui devrait avoir sa place marquée dans les *Éléments de Géométrie*. L'énoncé en est le suivant :

Dans tout cercle, étant données deux cordes parallèles a et b et éloignées l'une de l'autre d'une distance d, le carré de la corde c, équidistante de ces deux cordes, égale la demi-somme des carrés des deux cordes a et b, plus le carré de leur distance d.

Car, si l'on désigne par R le rayon du cercle et par x la distance au centre de la corde moyenne c, on a trois

triangles rectangles qui donnent les égalités

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,\quad R^2 = \frac{b^2}{4} + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = \frac{c^2}{4} + x^2.$$

Ajoutant les deux premières et du résultat retranchant deux fois la dernière, on trouve la relation

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{d^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

qui prouve que

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + d^2.$$

Le rayon R du cercle, qui passe par les extrémités des deux cordes parallèles a et b, est d'ailleurs donné par l'équation

$$64 R^2 d^2 = [4d^2 + (a + b)^2][4d^2 + (a - b)^2].$$

L'expression $V = \frac{1}{4}\pi c^2 d - \frac{1}{12}\pi d^3$ du segment sphérique avait déjà été donnée, d'une manière plus compliquée il est vrai, par M. Desboves dans ses *Questions de Géométrie.*

Les courbes usuelles sont traitées, dans le dernier Livre, avec quelque extension, mais toujours avec la plus rigoureuse simplicité. A la suite de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole viennent la spirale d'*Archimède*, la développante du cercle, la cycloïde et l'épicycloïde dont les trois dernières sont demandées par le programme de dessin de l'Enseignement spécial.

Quelques mots sur la chaînette et les propriétés de l'hélice complètent cette partie.

L'Appendice, qui termine l'Ouvrage, étudie les sections du cône et du cylindre, donne encore quelques propriétés de l'hyperbole, définit les surfaces du second

degré, telles que l'ellipsoïde, les deux hyperboloïdes et les deux paraboloïdes; pose les principes de rectification des courbes et de quadrature des surfaces, fournit l'expression de plusieurs volumes, et applique les théories exposées au jaugeage des tonneaux, au tracé des voûtes, des ponts solides ou suspendus, des routes et des canaux.

Cette partie est fort intéressante et sera vraiment goûtée par les jeunes lecteurs, qui pourront se faire une idée des applications nombreuses et variées de la Géométrie.

Nous savons gré au Frère Gabriel Marie d'avoir su introduire dans les *Éléments* quelques notions qu'on ne cherche que dans les Traités spéciaux; ces notions sont fort utiles, et, dès qu'elles sont présentées avec simplicité, dès qu'elles sont mises à la portée des jeunes intelligences, elles appartiennent de droit aux Éléments de la Science.

Près de 800 questions sont intercalées dans le texte de tout l'Ouvrage; elles se trouvent résolues dans un second volume aussi étendu que le premier. Ces exercices, dont plusieurs sont peu répandus, sont remarquablement choisis; ils forment le complément presque indispensable des *Éléments de Géométrie*. GEORGES DOSTOR.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. BONCOMPAGNI, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere

ed Arti di Modena, socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

TOME VIII (1875).

GENNAIO 1875. — Intorno alla vita ed ai lavori del prof. *Geminiano Riccardi*, Cenni di Luigi Lodi.

Catalogo dei lavori del prof. *Geminiano Riccardi*. Due scritti inediti del prof. *Geminiano Riccardi*.

I. Saggio di alcune noterelle relative allo scrito intitolato : « *Mémoire sur les travaux et les écrits de M. Legendre, membre de l'Institut et du Bureau des longitudes de France, et des principales Académies de l'Europe.* » Segnato in fine dalle iniziali : F. M., colla data di Ginevra, 24 febbrajo 1833, ed inscrito nel giornale *la Bibliothèque universelle.* (V. il quaderno, janvier et février 1833, 18e année, Sciences et Arts, t. LII, p. 45-82). G. R.

II. Breve esame critico sopra un annunzio relativo ai lavori instituiti dalla R. Accademia delle Scienze e Belle-Lettere di Brusselles nell' adunanza del 15 dicembre 1839. Nota di G. R., letta alla Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, nell' adunanza della sezione di Scienze del 30 maggio 1840.

Intorno ad una proprietà de numeri dispari. — B. Boncompagni.

FEBBRAIO 1875. — Sur les emprunts que nous avons faits à la Science arabe, et, en particulier, de la détermination de la troisième inégalité lunaire ou variation par *Aboul-Wefâ*, de Bagdad, astronome du xe siècle. Lettre de M. L.-Am. *Sédillot* à D.-B. Boncompagni.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

MARZO 1875.— Notice sur la vie et les travaux de Rodolphe-Frédéric-Alfred Clebsch; par M. *Paul Mansion.*

Catalogue des travaux de R.-F.-A. Clebsch.

APRILE 1875. — Zur || Geschichte der Mathematik || in || Alterthum und Mittelalter || von || Dr *Hermann Hankel* || Weil. ord. Professor der Math. an der Universität zu Tübingen. || Leipzig || Druck und Verlag von B.-G. Teubner 1874. In-8o de 414 pages. — *P. Mansion.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio 1875. — Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangenti detto *metodo del Roberval;* Nota dell' ing^{re} *Ferdinando Jacobi,* professore nella R. Scuola Alliavi Macchinisti di Marina in Venezia.

Giugno 1875. — Intorno alla vita ed ai lavori del *P. Paolo Rosa* d. C. d. G. — *F. Marchetti* d. C. d. G.

Catalogo dei lavori del *P. Paolo Rosa* d. C. d. G.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio 1875. — Intorno ad alcune lettere di *Evangelista Torricelli*, del *P. Marino Mersenne* e di *Francesco Du Verdus.* — B. Boncompagni.

Lettere di Evangelista Torricelli al P. Marino Mersenne.

Lettere del P. Marino Mersenne ad Evangelista Torricelli.

Lettere di Francesco Du Verdus ad Evangelista Torricelli.

Agosto 1875. — Grande exécution d'automne. Lettre de M. *L.-Am. Sédillot* à M. le Dr *Ferdinand Hoefer,* au sujet des Sciences mathématiques des Indiens et des origines du sanscrit.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Settembre 1875. — La vie et les travaux de *Jean Hévélius;* par M. *L.-C. Béziat.*

Ottobre 1875. — La vie et les travaux de *Jean Hévélius;* par M. *L.-C. Béziat* (continuazione).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Novembre 1875. — La vie et les travaux de *Jean Hévélius;* par M. *L.-C. Béziat* (continuazione).

Dicembre 1875. — La vie et les travaux de *Jean Hévélius;* par M. *L.-C. Beziat* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Conic Sections, treated geometrically, by *W.-H. Besant,* M.-A.; F. R. S. Lecturer, and late Fellow of St-John's college, Cambridge. *Second edition.* Cambridge : Deighton, Bell, and Co. — London : George Bell and Sons. (1875.)

Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte. —

Academische Vorträge, von Dr *Alfred Enneper*, Professor an der Universität zu Göttingen. Halle a/S. — Verlag *von Louis Nebert* (1876).

Quarta parte della duodecima rivista di giornali, presentata al R. Istituto veneto nell' agosto 1875, dal prof. Giusto Bellavitis, membro effettivo del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Tredicesima rivista di giornali, presentata al R. Istituto veneto nel gennaio 1876, dal prof. Giusto Bellavitis, membro effettivo del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Seconda parte della tredicesima rivista di giornali, presentata al R. Istituto veneto nel febbrajo 1876, dal prof. *Giusto Bellavitis*, membro effettivo del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Le proprietà fondamentali delle curve di second' ordine, studiate sulla equazione generale di secondo grado, in coordinate cartesiane. Lezioni date nella Regia Università di Torino, dal professore Enrico d'Ovidio. — Roma, Torino, Firenze, *Ermanno Loescher* (1876).

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Narcisse Milevski, professeur de Mathématiques à Nicolajeff (Russie méridionale). — « J'ai l'honneur de vous adresser deux théorèmes découverts et démontrés par l'élève Eusèbe *Karatchunsky*, de la sixième classe, à l'École professionnelle *Alexandre*, à Nicolajeff. »

Voici en quoi consistent les deux théorèmes découverts et démontrés par M. Eusèbe Karatchunsky.

Soit DE une perpendiculaire élevée à l'hypoténuse AC d'un triangle rectangle ABC, au milieu D de l'hypoténuse, et rencontrant en un point E l'un des côtés BC de l'angle droit du triangle, on aura

$$1^\circ\ \overline{EC}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2\ ;\quad 2^\circ\ AC^2 = 2BC \times EC.$$

Extrait d'une lettre de M. Moreau. — « Vous avez bien voulu insérer, aux pages 527 et 528 du dernier tome des *Nouvelles Annales,* quelques questions que je vous avais envoyées; mais je viens de m'apercevoir que celle qui porte le n° 3, et qui est relative au développement du produit

$$(1 + xr)\ ..(1 + x^n r),$$

n'a aucune raison d'être proposée, car sa solution se trouve implicitement contenue dans un article de M. *de Virieu,* inséré aux pages 349 et 350 du même tome. »

Note. — Nous avons reçu de M. Gambey une solution de la question d'admission à l'École Normale supérieure (1875); et de M. Wisselinck, à Heerenveen (Pays-Bas), une solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique (1875). M. Wisselinck a, de même, résolu la question d'admission à l'École Centrale (1874). Ces différentes solutions nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro d'avril.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 506

(voir 1re série, t. XIX, p. 45);

PAR M. H. BROCARD.

Deux points parcourent chacun une droite, et dans le même plan. Soient e, v l'espace parcouru et la vitesse du premier point au bout du temps t; e_1, v_1 les

mêmes données pour le second point. Si l'on a la relation

$$v(a_1 + b_1 e_1) = v_1(a + be),$$

où les a et les b sont des constantes, la droite qui réunit les points, au même instant, enveloppe une conique. En indiquer le genre et l'espèce.

Prenons pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle des deux droites. Celles-ci auront pour équations

$$y = mx, \quad y = -mx.$$

L'équation de la droite dont on cherche l'enveloppe est

$$e(y - mx) - e_1(y + mx) + 2see_1 = 0,$$

s désignant la quantité $\dfrac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$.

On en tire

$$e = \frac{e_1(y + mx)}{y - mx + 2se_1}$$

et, en prenant les dérivées,

$$v = \frac{v_1(y^2 - m^2x^2)}{(y - mx + 2se_1)^2}.$$

D'ailleurs, on donne la condition

$$\frac{v}{a + be} = \frac{v_1}{a_1 + b_1 e_1},$$

dans laquelle a et a_1 doivent être des longueurs, b et b_1 des constantes numériques.

Remplaçons dans cette équation e et v par leurs expressions en fonction de v_1 et de e_1; nous aurons, après suppression du facteur commun v_1,

$$\begin{aligned} & 2se^2[2sa + b(y + mx)] \\ & \quad + e_1(y - mx)[4sa + (b - b_1)(y + mx)] \\ & \quad + (y - mx)[a(y - mx) - a_1(y + mx)] = 0. \end{aligned}$$

L'équation de l'enveloppe de la droite sera donc, après avoir supprimé le facteur commun $y - mx$,

$$(y - mx)[4sa + (b - b_1)(y + mx)]^2$$
$$-8s[2sa + b(y + mx)][a(y - mx) - a_1(y + mx)] = 0.$$

De nouvelles réductions font également disparaître le facteur $y + mx$, et il reste définitivement l'équation

$$(b - b_1)^2(y^2 - m^2x^2) + 8s(a_1 b - b_1 a)y$$
$$+ 8sm(a_1 b + b_1 a)x + 16aa_1 s^2 = 0,$$

qui représente toujours une hyerbole dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites données.

Son centre a pour coordonnées

$$x = \frac{4s(a_1 b + b_1 a)}{m(b - b_1)^2}, \quad y = \frac{4s(ab_1 - ba_1)}{(b - b_1)^2}.$$

Question 1130

(voir 2e série, t. XIII, p. 112);

PAR M. BOURGUET.

Étant données une courbe plane quelconque et une surface du second degré, trouver les surfaces développables qui, passant par la courbe, ont leur arête de rebroussement sur la surface : l'équation différentielle du premier ordre, à laquelle se ramène la solution de ce problème, peut toujours s'intégrer par de simples quadratures. (E. LAGUERRE.)

1° Supposons que la surface soit un cylindre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

les équations de la génératrice seront

$$y = mx \pm \sqrt{m^2a^2 + b^2}, \quad z = px + q,$$

et la condition que deux génératrices consécutives se coupent donne

$$\frac{dq}{dp} = \frac{ma^2}{\sqrt{m^2a^2 + b^2}},$$

et pour qu'elle coupe la courbe $\varphi(x, y) = 0$, il faut que

$$\varphi\left(-\frac{q}{p}, -m\frac{q}{p} + \sqrt{m^2a^2 + b^2}\right) = 0;$$

on tire de là

$$m = \psi\left(\frac{q}{p}\right),$$

et dès lors

$$\frac{dq}{dp} = \mathrm{F}\left(\frac{q}{p}\right),$$

équation homogène, d'où l'on tire

$$f(p, q) = 0.$$

2° Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-h)^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de la surface;

$$x = mz + \mathrm{X}, \quad y = nz + \mathrm{Y}$$

celles de la génératrice. La condition que deux génératrices consécutives se coupent donne

$$-\frac{1}{\mathrm{Z}} = \frac{dm}{d\mathrm{X}} = \frac{dn}{d\mathrm{Y}},$$

et la condition que le point d'intersection soit sur la surface donne

$$\frac{dm^2}{d\mathrm{X}^2}\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} - 1\right)$$
$$- 2\frac{dm}{d\mathrm{X}}\left(\frac{m\mathrm{X}}{a^2} + \frac{n\mathrm{Y}}{b^2} - \frac{h}{c^2}\right) + \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

et en différentiant

$$\frac{d^2m}{dX^2}\left[\frac{dm}{dX}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{mX}{a^2}+\frac{nY}{b^2}-\frac{h}{c^2}\right)\right]=0.$$

Le facteur $\frac{d^2m}{dX^2}=0$ donne un cône, qui a son sommet sur la surface, et pour directrice la courbe. C'est le second facteur qui donne la solution. Différentions, pour éliminer n, il vient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad+\frac{dm}{dX}\left[\frac{X}{a^2}\left(1-\frac{XY'}{Y}\right)-\frac{Y'}{Y}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\right]\\ &\qquad\qquad-\frac{m}{a^2}\frac{Y-XY'}{Y}+\frac{h}{c^2}\frac{Y'}{Y}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons, $\frac{h}{c}$ conservant une valeur finie plus petite que 1, que $\frac{1}{c}$ tende vers zéro; la surface deviendra un cylindre, et l'équation (1) deviendra

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad+\frac{dm}{dX}\left[\frac{X}{a^2}\left(1-\frac{X}{Y}Y'\right)-\frac{Y'}{Y}\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)\right]\\ &\qquad\qquad-\frac{m}{a^2}\left(1-X\frac{Y'}{Y}\right)=0;\end{aligned}\right.$$

mais on connaît une intégrale particulière de cette équation

$$f\left(\frac{1}{m},-\frac{X}{m}\right)=0,$$

par suite, l'intégrale générale de l'équation (1) se trouve ramenée à des quadratures.

Ainsi les équations linéaires (1) et (2) s'intègrent complétement, quelle que soit la relation qui lie X et Y. Dans le cas particulier où $h = c$, l'équation (2) devient

$$\frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) + \frac{Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\left(X\frac{dm}{dX} - m\right) = 0,$$

$$(3)\quad \frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) + \frac{X^2 Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\frac{d}{dX}\left(\frac{m}{X}\right) = 0,$$

et l'équation (1)

$$(4)\quad \frac{d^2 m}{dX^2}\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}\right) + \frac{X^2 Y}{a^2}\left(\frac{X}{Y}\right)'\frac{d}{dX}\left(\frac{m}{X}\right) + \frac{Y}{c}\left(\frac{1}{Y}\right)' = 0.$$

L'intégrale particulière de (3) est $m = cX$.

Question 1156

(voir 2e série, t. XIV, p. 94);

Par M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences, à Rennes.

On a une masse quelconque, attirant suivant la loi de la gravitation. Soit dv un élément infiniment petit de volume pris n'importe où dans l'espace. Si on le suppose rempli d'une matière homogène ayant pour densité 1, *il supportera une attraction* R *de la part de la masse attirante. Soit r la distance de cet élément dv à un point fixe* M, *et φ l'angle que la direction de* R *fait avec la direction qui joint l'élément dv au point* M. *Si l'on fait la somme de toutes les expressions* $\frac{R\cos\varphi}{r^2}$ *qui se rapportent à tous les éléments dv de l'espace, le résultat sera égal au produit du potentiel de la masse attirante relativement au point* M, *par* $4\pi f$, π *étant le rapport de la circonférence au diamètre, et f la force d'attraction de deux points matériels de masse* 1, *situés à l'unité de distance.* (F. Didon.)

Supposons, pour un instant, la masse attirante μ concentrée en un point situé à une distance a du point M et à une distance ρ de l'élément de volume dv; dans ce cas on a

$$R = \frac{f\mu\, dv}{\rho^2}.$$

Si l'on prend le point fixe M pour origine d'un système de coordonnées polaires (r, θ, ψ), l'expression bien connue de l'élément de volume dv est

$$r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\psi;$$

par suite on a

$$(1) \qquad \frac{R\cos\varphi}{r^2} = f\mu \frac{\sin\theta\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\psi}{\rho^2}.$$

Dans le triangle ayant pour sommets le point M, l'élément dv, et le point de masse μ, et dont les côtés sont r, ρ, a, on a

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\cos\psi,$$

et de plus

$$dr\cos\varphi = d\rho = d\left(\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}\right),$$

et par suite

$$\frac{dr\cos\varphi}{\rho^2} = -d\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}}\right);$$

en sorte que la relation (1) devient

$$\frac{R\cos\varphi}{r^2} = -f\mu\, d\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\sin\psi}}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\psi;$$

d'où

$$\sum \frac{R\cos\varphi}{r^2} = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -f\mu\, d\left(\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

$$= 4\pi f \frac{\mu}{a}.$$

Or $\frac{\mu}{a}$ est le *potentiel* de la masse μ relatif au point M, et le théorème est démontré pour le cas spécial dans lequel je me suis placé.

Supposons maintenant la masse attirante quelconque et soit dm un élément quelconque de cette masse; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\sum \frac{\mathrm{R}\cos\varphi}{r^2} = 4\pi f \frac{dm}{a},$$

en ne considérant que le seul élément dm; si on fait la somme des actions analogues pour tous les éléments de la masse attirante, on aura enfin

$$\sum \frac{\mathrm{R}\cos\varphi}{r^2} = 4\pi f \sum \frac{dm}{a}.$$

Or $\sum \frac{dm}{a}$ est le potentiel de la masse attirante relativement au point M, dans la loi naturelle de l'attraction; le résultat est donc bien celui que l'on demandait.

Note. — La même question a été résolue par M. Bourguet.

Question 1182

(voir 2e série, t. XIV, p. 384).

Par M. PRAVAZ.

Soient A *et* B *deux points d'un ovale de Descartes dont les foyers sont* F *et* F'.

AF *coupe en* K *le cercle décrit de* F *comme centre avec* FB *pour rayon;* AF' *coupe en* H *le cercle décrit de* F' *comme centre avec* F'B *pour rayon. Joignons* FH *et* F'K, *ces droites se coupent en* I.

Démontrer que la droite AI *passe par un point fixe, lorsque* A *se meut sur l'ovale.* (E. Lemoine.)

Désignons par ρ et ρ' les coordonnées bipolaires de A; par ρ_1 et ρ'_1 celles de B; par $2c$ la distance FF'; soit L le point où KH rencontre FF'; on a, d'après une proposition connue de la théorie des transversales,

$$\text{AK.F'H.LF} = \text{FK.AH.F'L},$$

ou

$$(\rho_1 - \rho)\rho'_1(2c - \text{F'L}) = \rho_1(\rho' - \rho'_1)\text{F'L},$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad \text{F'L} = \frac{2c(\rho_1 - \rho)\rho'_1}{\rho_1\rho' - \rho\rho'_1}.$$

On a, entre les coordonnées ρ, des équations de la forme

$$\rho = m\rho' + n,$$

$$\rho_1 = m\rho'_1 + n;$$

d'où

$$\rho_1\rho' - \rho\rho'_1 = n(\rho' - \rho'_1)$$

et

$$\rho - \rho_1 = m(\rho' - \rho'_1).$$

D'après cela, l'égalité (1) devient

$$\text{F'L} = \frac{2cm\rho'_1}{n}.$$

Le point L est donc fixe quand A se meut sur l'ovale; il en est de même du point de rencontre de AI avec FF', car ce dernier point est, comme l'on sait, le conjugué harmonique de L, par rapport à F et F'.

Note. — La même question a été résolue par M. de Cuerne, à Liége.

Question 1188

(voir 2e série, t. XV, p. 96);

PAR M. A. TOURNOIS,
à Saint-Omer.

Si deux mobiles se meuvent dans un plan sur deux courbes quelconques, mais avec des vitesses respective-

ment égales à chaque instant, la droite qui les joint touche continuellement son enveloppe au point symétrique par rapport à son milieu, de celui où elle est rencontrée par la bissectrice de l'angle des deux tangentes.

Ce théorème s'applique en particulier à l'enveloppe des cordes qui sous-tendent dans une courbe quelconque des arcs de longueur constante.

(Haton de la Goupillière.)

Soient AT, BT les tangentes aux points A, B (*), où se trouvent les mobiles au temps t. Pendant le temps Δt infiniment petit qui suit, ils décrivent deux éléments égaux AA', BB' de ces tangentes ; la droite A'B' coupe AB en un point D dont la position limite est le point où AB touche son enveloppe. Si C est le point où la bissectrice de l'angle des tangentes coupe AB, il suffit évidemment de prouver que

$$\lim \frac{AD}{BD} = \frac{BC}{AC} \quad \text{ou} \quad \lim \frac{AD}{BD} = \frac{BT}{AT} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Les triangles AA'D, BB'D donnent

$$\frac{AD}{AA'} = \frac{\sin A'}{\sin D}, \quad \frac{BD}{BB'} = \frac{\sin B'}{\sin D}.$$

Divisant, membre à membre, on a

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin A'}{\sin B'}.$$

Il suffit donc de prouver que $\lim \dfrac{\sin A'}{\sin B'} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$, ce qui est évident quand A'B' vient se confondre avec AB.

Remarque. — Si l'on considère l'enveloppe d'une corde sous-tendant dans une courbe des arcs égaux, les deux extrémités de la droite décrivent évidemment des arcs

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

égaux dans des temps égaux, et par suite le théorème précédent est applicable.

Note. — La même question à été résolue par MM. Trautmann, étudiant à Strasbourg; Barthe et Clautrier, élèves en mathématiques spéciales au Lycée de Poitiers; Pravaz, professeur au Collége de Tulle; Moret-Blanc; R.-W. Genese; P. Souverain, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Moulins.

Question 1189

(voir 2e série, t. XV, p. 96);

PAR M. MORET-BLANC.

La droite qui se meut de manière à rencontrer à chaque instant deux courbes quelconques sous deux angles respectivement égaux touche continuellement son enveloppe au point où elle est coupée par la droite qui joint les deux centres de coubure.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Soient AB, A′B′ deux positions infiniment voisines de la droite mobile, A et A′ étant les intersections avec la première courbe, B et B′ les intersections avec la seconde.

Les arcs infiniment petits AA′ et BB′ se confondent avec ceux des cercles osculateurs en A et B, et ont les mêmes tangentes à leurs extrémités. Les droites AB, A′B′ coupent donc les deux cercles osculateurs sous deux angles respectivement égaux, et, par suite, vont concourir à l'un des centres de similitude de ces deux cercles, point qui est situé sur la ligne de leurs centres, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — Une corde qui se meut de manière à couper une courbe sous deux angles égaux touche son enveloppe en un point situé sur la droite qui joint les centres de courbure de ses deux extrémités.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lucien Levy; R.-W

Genese; Pravaz; A. Tournois; H.-W. Wisselink; Barthe et Clautrier, du Lycée de Poitiers; Souverain, du Lycée de Moulins; Ch. Picard, élève du Lycée de Grenoble (classe de M. Bernard).

Question 1191

(voir p. 144);

PAR MADEMOISELLE LUCIE LEBOEUF,
à Commentry.

Les foyers de toutes les ellipses qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe, appartiennent à une même circonférence.

(W.-H. BESANT.)

Je prends pour axe des y l'axe commun aux ellipses considérées (*) et pour axe des x la tangente au sommet fixe commun.

a, b, c étant les demi-axes et la demi-distance focale, variables de toutes ces ellipses, x et y les coordonnées de l'un quelconque des foyers, on a les relations

$$\frac{c^2}{b} + b = k,$$

k étant une constante,

$$y = b,$$
$$x^2 = c^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement, pour équation du lieu, le cercle dont l'équation est

$$x^2 + y^2 - ky = 0.$$

On voit de même, aussi facilement, que le lieu des

(*) Le point d'une ellipse où le cercle osculateur est maximum se trouve à l'une des deux extrémités du petit axe de la courbe. Il en résulte que toutes les ellipses qui ont en un point donné fixe le même cercle osculateur maximum ont aussi un axe de symétrie commun coïncidant avec le rayon mené du point fixe au centre de ce cercle.

foyers des ellipses ayant un sommet de petit axe commun, et telles que la distance de leur centre au centre de leur cercle osculateur maximum correspondant soit constante, est une parabole.

On a, en effet, les relations

$$\frac{c^2}{b} = k,$$

$$y = b,$$

$$x^2 = c^2;$$

d'où résulte, par l'élimination de b et c, l'équation de la parabole

$$x^2 - ky = 0.$$

Solution géométrique de la question 1191

(voir p. 144);

PAR M. L. THEVENIN,
Élève au Lycée Charlemagne.

Les foyers de toutes les ellipses qui ont leur cercle osculateur maximum commun en un point donné fixe appartiennent à une même circonférence.

Soient B le point fixe donné; C le centre du cercle osculateur maximum en B; $2a$, $2b$ les axes de l'une quelconque des ellipses considérées; O le centre de cette ellipse; F, F′ ses foyers.

On sait que le point B est une des extrémités du petit axe de l'ellipse, et que le rayon BC du cercle osculateur maximum est égal à $\frac{a^2}{b}$, et coïncide, en direction, avec le petit axe BO de l'ellipse. On a donc

$$BC = \frac{a^2}{b} = \frac{\overline{BF}^2}{BO};$$

par conséquent, l'angle BFC est droit, et le lieu des foyers F, F′ est la circonférence décrite sur BC comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par MM. Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; Launoy, répétiteur au Lycée de Lille; Demartre; A. Tournois; Moret-Blanc; Gambey; H.-W. Wisselink; Clautrier, élève en mathématiques spéciales au Lycée de Poitiers, classe de M. Longchamps; Ch. Picard, du Lycée de Grenoble, classe de M. Bernard.

Question 1192

(voir p. 144);

PAR M. SEGUE,

Élève au Lycée Charlemagne.

Une ellipse a son centre sur une hyperbole donnée et touche les asymptotes de cette hyperbole; démontrer que la corde des contacts, correspondant au maximum de l'aire de l'ellipse, est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

(W. H. BESANT.)

Soient C le centre de l'hyperbole (*); $2a$, $2b$ ses axes; O un point quelconque de cette courbe, considéré comme centre d'une ellipse tangente aux deux asymptotes de l'hyperbole; HH′ la corde des contacts, et GG′ une tangente au point O à l'hyperbole, et rencontrant ses asymptotes aux points G et G′.

Les droites HH′ et GG′ sont parallèles, parce qu'elles sont, toutes deux, inscrites dans l'angle des asymptotes, et divisées en deux parties égales, en des points M et O, par la même droite CO.

Soient A, B les points où l'ellipse considérée est rencontrée par OC et OG, et θ l'angle COG ou AOB.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Les droites OA, OB sont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse, et l'aire de cette courbe a pour valeur le produit

$$\pi\, OA.OB \sin\theta.$$

Cela posé, menons par le point H et parallèlement à CO la corde HH″ de l'ellipse, dont le milieu I se trouvera sur OG.

Il est facile de voir que le point G est, par rapport à l'ellipse, le pôle de HH″; de sorte qu'on a

$$\overline{OB}^2 = OG \times OI$$

ou, parce que OI = MH, comme côtés opposés du parallélogramme OIMH,

$$\overline{OB}^2 = OG \times MH.$$

De même, le point C étant le pôle de la corde HH′, dont le milieu est M, on a

$$\overline{OA}^2 = CO \times OM;$$

d'où

$$(OA.OB)^2 = (CO.OG)(OM.MH).$$

Mais, les triangles CMH, COG, semblables, à cause du parallélisme des droites MH, OG, donnent

$$MH = \frac{OG.CM}{OC};$$

donc

$$(OA.OB)^2 = OG^2(CM.OM),$$

ou

$$(OA.OB) = OG\sqrt{CM.OM},$$

D'autre part, les droites OG, OC, étant, en grandeurs et en directions, deux demi-diamètres conjugués de l'hyperbole, on a

$$OG.OC.\sin\theta = ab;$$

il s'ensuit

$$OG = \frac{ab}{OC.\sin\theta},$$

d'où

$$OA.OB\sin\theta = \frac{ab}{OC}\sqrt{CM.OM} = ab\sqrt{\left(\frac{CM}{OC}\right)\left(\frac{OM}{OC}\right)}$$

et

$$(1) \qquad \pi\,OA.OB\sin\theta = \pi ab\sqrt{\left(\frac{CM}{CO}\right)\left(\frac{OM}{CO}\right)}.$$

Par conséquent, le maximum de l'aire de l'ellipse correspond au maximum du produit $\left(\frac{CM}{CO}\right)\left(\frac{OM}{CO}\right)$. Or la somme des deux facteurs $\frac{CM}{CO}$, $\frac{OM}{CO}$ de ce produit est constante, car

$$\frac{CM}{CO} + \frac{OM}{CO} = \frac{CO}{CO} = 1;$$

donc le maximum a lieu lorsque

$$\frac{CM}{CO} = \frac{OM}{CO},$$

d'où

$$\frac{CM}{CO} = \frac{1}{2}, \quad CM = \frac{1}{2}CO.$$

Cette dernière égalité montre que, dans le cas où l'aire de l'ellipse est un maximum, le lieu géométrique du point M, milieu de la corde des contacts HH′, est une hyperbole concentrique et homothétique à l'hyperbole donnée. Le centre d'homothétie est le point C; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. Les points M et O se correspondent; les droites HH′, GG′ sont parallèles; donc, conformément à l'énoncé, la corde HH′ des contacts de l'ellipse est tangente à une hyperbole semblable à l'hyperbole donnée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Demartre; Moret-Blanc; Gambey; A. Tournois; B. Launoy, répétiteur au Lycée de Lille; L. Thévenin, élève au Lycée Charlemagne.

M. Demartre suppose d'abord qu'une ellipse d'aire constante πr^2, est tangente à deux droites données faisant entre elles un angle θ. En prenant ces deux droites pour axes de coordonnées, et désignant par α, β, les coordonnées du centre de l'ellipse, l'équation de l'ellipse est

$$\beta^2(x-\alpha)^2 + \frac{2Br^4}{\sin^2\theta}(x-\alpha)(y-\beta) + \alpha^2(y-\beta)^2 = \frac{r^4}{\sin^2\theta},$$

avec la condition

$$(2)\qquad B^2 = \frac{\sin^2\theta}{r^4}\left(\alpha^2\beta^2\frac{\sin^2\theta}{r^4} - 1\right).$$

La corde des contacts a pour équation

$$\alpha y + \beta x = \alpha\beta + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}.$$

« Si maintenant nous supposons le centre de l'ellipse assujetti à décrire l'hyperbole $xy = k^2$, nous aurons $\alpha\beta = k^2$, d'où pour la corde des contacts

$$\alpha y + \beta x = k^2 + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}, \quad \text{et} \quad \alpha\beta = k^2.$$

» D'après l'égalité (2) B est constant, dans le cas actuel, et l'enveloppe de la corde des contacts sera

$$(3)\qquad xy = \frac{1}{4k^2}\left(k^2 + \frac{Br^4}{\sin^2\theta}\right)^2.$$

» Donc :

» *Lorsqu'une ellipse, d'aire constante, touche constamment les asymptotes d'une hyperbole que décrit son centre, la corde des contacts enveloppe une hyperbole ayant les mêmes asymptotes.* »

C'est de cette proposition générale, dont je ne con-

teste pas l'exactitude, que M. Demartre déduit, comme cas particulier, la proposition relative au maximum de l'aire de l'ellipse.

Je ferai seulement observer que l'équation (2) donne pour B deux valeurs égales et de signes contraires, lorsque l'aire πr^2 de l'ellipse considérée n'est pas maximum. Il en résulte qu'alors l'équation (3) représente deux hyperboles correspondant aux deux valeurs de B.

L'équation (1) établie, p. 236, par M. Segue, conduit à la même conclusion.

Car, en représentant par πr^2, l'aire de l'ellipse, cette équation devient

$$r^2 = ab\sqrt{\left(\frac{\text{CM}}{\text{CO}}\right)\left(\frac{\text{OM}}{\text{CO}}\right)};$$

d'où

$$\left(\frac{\text{CM}}{\text{CO}}\right)\left(\frac{\text{OM}}{\text{CO}}\right) = \left(\frac{r^2}{ab}\right)^2.$$

D'ailleurs

$$\frac{\text{CM}}{\text{CO}} + \frac{\text{OM}}{\text{CO}} = 1;$$

donc le rapport $\frac{\text{CM}}{\text{CO}}$ est racine de l'équation du second degré

$$\text{X}^2 - \text{X} + \left(\frac{r^2}{ab}\right)^2 = 0,$$

et l'on a, pour ce rapport, les deux valeurs

$$\frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2r^2}{ab}\right)^2}\right],$$

qui sont réelles, positives et inégales lorsque r^2 est moindre que $\frac{ab}{2}$, c'est-à-dire, lorsque l'aire πr^2 de l'ellipse n'est pas maximum.

Dans ce cas, à chaque position du centre O de l'ellipse,

sur l'hyperbole donnée, correspondent deux cordes de contact, parallèles à la tangente menée à l'hyperbole au point O, et rencontrant la droite CO, à des distances de C égales à $\frac{1}{2}\mathrm{CO}\left[1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{2r^2}{ab}\right)^2}\right]$. Il s'ensuit que ces deux cordes sont respectivement tangentes à deux hyperboles concentriques et homothétiques à l'hyperbole donnée. (G).

Question 1193

(voir 2ᵉ série, t. XIII, p. 304);

PAR M. ÉDOUARD ROBERT,
Elève en Mathématiques spéciales, au Lycée d'Amiens.

On donne deux tangentes et un foyer d'une conique; démontrer que la corde des contacts passe par un point fixe. (W.-H. BESANT.)

Soient SM et SN (*) les deux tangentes; F le foyer et AB une corde de contact. Menons FC perpendiculaire sur SF au point F, cette perpendiculaire sera coupée en C par la corde des contacts AB. Soit I le point d'intersection de AB et de SF. Les quatre points A, I, B, C forment une proportion harmonique (théorème des bissectrices); donc le faisceau (S, AIBC) est harmonique. Or, les trois droites SA, SI, SB de ce faisceau sont fixes; donc la droite SC est déterminée, et, par conséquent, le point C, intersection des droites SC, FC, est fixe et déterminé.

Note. — La même question a été résolue par MM. Demartre; Morel; Lez; Tournois; B. Launoy; Moret-Blanc; Gambey; H.-W. Wisselink; Berthomieu et H. Dessoudeix, élèves au Lycée de Bordeaux; L. Thevenin, du Lycée Charlemagne; Louis Thuillier, du Lycée d'Amiens; Picard, du Lycée de Grenoble; Louis Goulin, du Lycée Corneille, à Rouen (classe de M. Vincent); E. Barthe et Clautrier, élèves au Lycée de Poitiers; G. de Beauséjour et de Coatpont, élèves au Collége Stanislas.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUESTIONS.

1207. On joint les trois sommets d'un triangle ABC à un point P, et l'on prend les intersections A', B', C' des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu du point P, de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A', B', C' se rencontrent en un même point Q. Ce lieu est une cubique, dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; déterminer les asymptotes, et trouver aussi le lieu du point Q.

(É. Lucas.)

1208. Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles doublement tangentes à une hyperbole équilatère donnée, de manière que les axes de ces paraboles conservent une direction constante et donnée. Lieu des sommets des mêmes paraboles. (Gambey.)

1209. Deux ellipses sont concentriques; on leur mène une tangente commune, et l'on joint au centre les points de contact; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.

(Mannheim.)

1210. Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré, également donnée.

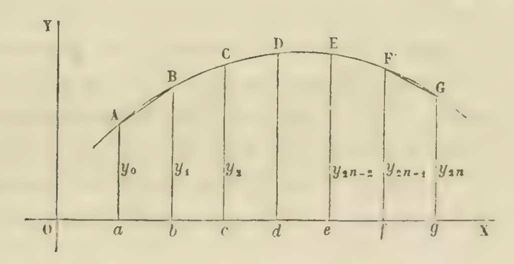
(V. Hioux.)

SIMPLIFICATION DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION DE THOMAS SIMPSON;

PAR M. LE GÉNÉRAL THÉODORE PARMENTIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

On a souvent à évaluer l'aire comprise entre l'axe des abscisses, deux ordonnées et l'arc d'une courbe dont l'équation n'est pas connue ou pour laquelle l'expression différentielle de l'aire $f(x)\,dx$ n'est pas intégrable. On est alors obligé de ne considérer qu'un certain nombre de points de la courbe et de recourir à une formule d'interpolation.

L'une des plus célèbres est celle de Thomas Simpson, dont la méthode consiste à diviser la base ag de l'aire à



calculer en un nombre pair de parties égales; puis, après avoir mené les ordonnées des points de division a, b, $c, \ldots, g$, à remplacer la courbe par une série d'arcs de paraboles du second degré à axes parallèles aux ordonnées, passant successivement par les extrémités des trois premières ordonnées; des troisième, quatrième et cinquième; et ainsi de suite jusqu'aux trois dernières. En appelant h l'équidistance des ordonnées, les aires des

trapèzes paraboliques $aACc$, $cCEe$,... ont pour expressions

$$\tfrac{1}{3}h(y_0+4y_1+y_2),$$
$$\tfrac{1}{3}h(y_2+4y_3+y_4),\ldots,$$
$$\tfrac{1}{3}h(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}),$$

et leur somme, que l'on peut prendre pour l'aire de la courbe donnée, est

$$S=\tfrac{1}{3}h\left[y_0+y_{2n}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}) + 2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})\right]$$

ou

$$(1)\qquad S=\tfrac{1}{3}h\left[4\Sigma y_i+2\Sigma y_p-(y_0+y_{2n})\right],$$

en désignant par Σy_i la somme de toutes les ordonnées de rang pair (ou d'indice impair), et par Σy_p la somme de toutes les ordonnées de rang impair (ou d'indice pair).

Telle est la formule de Simpson qui, malgré son ancienneté et les nombreuses tentatives faites pour la remplacer par d'autres, donne encore, dans la plupart des cas, le résultat le plus approché. Malheureusement elle est assez longue et fatigante à appliquer, ce qui lui fait souvent préférer dans la pratique des formules incontestablement moins exactes, telles que celle de Poncelet

$$(2)\qquad S=h\left(2\Sigma y_i+\frac{y_0+y_{2n}}{4}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{4}\right).$$

On voit tout de suite que, tandis que la formule de Simpson exige la connaissance de la valeur numérique de $2n+1$ ordonnées, on n'a besoin d'en connaître que $n+2$ pour appliquer la formule de Poncelet, qui ne renferme pas d'ordonnées d'indice pair autres que les deux extrêmes.

La manière dont les ordonnées de rang pair et celles

de rang impair entrent dans la formule de Simpson donne le moyen d'éliminer Σy_i ou Σy_p entre cette formule et une autre que l'on formerait d'une manière analogue au moyen d'arcs de paraboles croisant les premiers, c'est-à-dire menés par les extrémités des ordonnées (y_1, y_2, y_3), $(y_3, y_4, y_5), \ldots, (y_{2n-3}, y_{2n-2}, y_{2n-1})$, sauf à compléter l'expression de l'aire approchée en ajoutant les deux trapèzes rectilignes extrêmes $aABb$, $fFGg$. Cette aire, que nous appellerons *auxiliaire*, aura pour expression

$$\tfrac{1}{3} h (y_1 + 4y_2 + y_3) + \tfrac{1}{3} h (y_3 + 4y_4 + y_5) + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{3} h (y_{2n-3} + 4y_{2n-2} + y_{2n-1}) + h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_{2n-1} + y_{2n}}{2}\right)$$

ou, toutes réductions faites,

$$(3)\quad S = \tfrac{1}{3} h \left[2\Sigma y_i + 4\Sigma y_p - \tfrac{3}{2}(y_0 + y_{2n}) + \tfrac{1}{2}(y_1 + y_{2n-1})\right].$$

Les formules (1) et (3) donnent chacune une valeur approchée de l'aire de la courbe. Appelons, pour les distinguer, S_1 et S_2 ces valeurs approchées de l'aire véritable S. On voit qu'on peut obtenir une autre valeur approchée de S en prenant $2S_1 - S_2$ ou $2S_2 - S_1$, ce qui permet de faire disparaître à volonté Σy_p ou Σy_i. Il sera d'ailleurs plus avantageux d'éliminer Σy_p; car il est clair que la formule (2) donne un résultat moins exact que celle de Simpson, puisqu'on s'est contenté pour les deux éléments extrêmes de l'approximation grossière du trapèze inscrit, et il vaut mieux prendre deux fois la valeur la plus approchée pour en retrancher la moins approchée que de faire l'opération inverse. Prenons donc

$$S_3 = 2S_1 - S_2.$$

Il viendra, toutes réductions faites,

$$(4)\quad S_3 = h\left(2\Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right).$$

On est ainsi parvenu à éliminer de la formule de Simpson les ordonnées d'indice pair, à l'exception des deux extrêmes y_0 et y_{2n}.

Or cette formule (4) est précisément celle que j'ai donnée d'abord dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* (N° 16, 1854, p. 290), puis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. XIV, 1855, p. 370), comme un perfectionnement de la formule de Poncelet, dont elle a la forme et les avantages tout en étant plus exacte, ainsi que le général Poncelet a bien voulu le reconnaître lui-même, et comme il est facile de s'en convaincre en relisant (*loc. cit.*) les considérations analytiques qui m'ont conduit à modifier la formule (2).

J'ai dit, à la fin du travail que je viens de citer, que la comparaison entre les formules (1) et (4) me paraissait difficile à faire et que je ne pouvais me prononcer sur leur mérite relatif, mais que néanmoins je croyais que ma nouvelle formule ne le cédait pas en exactitude à celle de Simpson. La manière nouvelle et toute différente d'arriver à la formule (4), que je viens d'exposer, permet, aujourd'hui, de se rendre assez bien compte du degré d'exactitude relative que l'on doit attribuer aux deux formules dont il s'agit.

En effet, la relation $S_3 = 2S_1 - S_2$ ou $2S_1 = S_2 + S_3$ montre que l'aire de Simpson est la moyenne arithmétique entre l'aire *auxiliaire* de la formule (3) et celle de la formule (4). Or, entre y_1 et y_{2n-1}, il n'y a aucune raison de supposer *a priori* que les paraboles de Simpson conduisent à un résultat plus ou moins approché que celles de l'aire auxiliaire : les deux méthodes, quoique ne conduisant pas à des résultats identiques, doivent être regardées comme absolument équivalentes au point de vue de leur exactitude. Mais, entre y_0 et y_1, ainsi qu'entre y_{2n-1} et y_{2n}, l'aire auxiliaire pour laquelle on s'est contenté de

remplacer la courbe par ses cordes donne une approximation beaucoup plus grossière que celle de Simpson et, *dans le cas d'une courbe concave vers l'axe des abscisses,* une valeur sensiblement plus petite que l'aire parabolique et que celle de la courbe donnée. On peut donc admettre que généralement l'aire auxiliaire est un peu plus petite que celle de Simpson (*) et que, par suite, celle de la formule (4) est un peu plus grande. Mais la formule de Simpson donne presque toujours un résultat trop faible : l'aire de la formule (4) pourra donc s'approcher davantage de celle de la courbe. Les exemples numériques que nous avons rassemblés dans les deux tableaux suivants montrent qu'il en est souvent ainsi :

(*) Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'excès de l'aire auxiliaire sur celle de Simpson entre y_1 et y_{2n-1} fût plus grand que la somme des deux segments paraboliques extrêmes AB, FG. Or la différence entre ces aires, résultant de la double manière de déterminer les arcs paraboliques (différence qui sera tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre), ne peut être que très-faible. On ne comprend donc guère que l'aire auxiliaire puisse surpasser celle de Simpson. Cela ne s'est, en effet, présenté dans aucun des huit exemples numériques dont il va être question et dans lesquels l'aire de la formule (4) est toujours plus grande ou plus petite que celle de Simpson, suivant que la courbe est concave ou convexe vers l'axe des abscisses.

Tableau nº 1. — *Courbes concaves vers l'axe des abscisses.*

COURBES.		AIRE EXACTE.	FORMULE de Poncelet, 7 ordonnées,	FORMULE NOUVELLE (formule 4), 7 ordonnées,	FORMULE de Simpson, 11 ordonnées,
			la base étant partagée en 10 parties égales.		
1. Quart de cercle ($R = 10$) : $y = \sqrt{20x - x^2}$ entre $x = 0$ et $x = 10$.	Aire........	78,540	78,221	78,580	78,174
	Erreur.........	"	+0,319	−0,040	+0,366
	Nº d'ordre d'approximation..	"	2	1	3
2. Parabole (axe horizontal) : $y^2 = 9x$ entre $x = 0$ et $x = 10$.	Aire...........	63,245	63,054	63,263	63,001
	Erreur.........	"	+0,191	−0,018	+0,244
	Nº d'ordre.....	"	2	1	3
3. Hyperbole (axe réel horiz.) : $y = \sqrt{20x + x^2}$ entre $x = 0$ et $x = 10$.	Aire...........	107,3571	107,0910	107,3758	106,9957
	Erreur.......	"	+0,2661	−0,0187	+0,3614
	Nº d'ordre.....	"	2	1	3
4. Sinusoïde : $y = \sin x$ entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.	Aire...........	1,000000	0,998465	1,000351	1,000006
	Erreur.........	"	+0,001535	−0,000351	−0,000006
	Nº d'ordre.....	"	3	2	1

TABLEAU N° 2. — *Courbes convexes vers l'axe des abscisses.*

COURBES.		AIRE EXACTE.	FORMULE de Poncelet, 7 ordonnées,	FORMULE NOUVELLE (formule 4), 7 ordonnées,	FORMULE de Simpson, 11 ordonnées,
			la base étant partagée en 10 parties égales.		
5. Parabole (axe vertical) :	Aire..........	0,3333	0,3345	0,3330	0,3333
$y = x^2$	Erreur.........	″	−0,0012	+0,0003	(aire exacte)
entre $x = 0$ et $x = 1$.	N° d'ordre.....	″	3	2	1
6. Hyperbole équilatère :	Aire..........	0,693147	0,693523	0,692984	0,693150
$y = \frac{1}{x}$	Erreur	″	−0,000376	+0,000163	−0,000003
entre $x = 1$ et $x = 2$.	N° d'ordre....	″	3	2	1
7. Courbe hyperbolique :	Aire..........	0,1666667	0,1667608	0,1666321	0,1666669
$y = \frac{1}{x^2}$	Erreur.........	″	−0,0000941	+0,0000346	−0,0000002
entre $x = 2$ et $x = 3$.	N° d'ordre.....	″	3	2	1
8. Cycloïde :	Aire..........	1,570796	1,588381	1,568381	1,591506
$y = \text{arc cos}(1 - x) - \sqrt{2x - x^2}$	Erreur.........	″	0,017585	+0,002415	−0,020710
entre $x = 0$ et $x = 2$.	N° d'ordre	″	2	1	3

On peut faire sur l'ensemble des huit exemples traités dans les tableaux ci-dessus les remarques suivantes (*) :

1° La formule de Poncelet donne toujours un résultat trop faible ou trop fort comme ferait la simple aire inscrite, suivant que la courbe tourne sa concavité ou sa convexité vers l'axe des abscisses; la formule (4) conduit, au contraire, à un résultat trop fort ou trop faible dans les mêmes circonstances que l'aire circonscrite. Quant à l'erreur de la formule de Simpson, elle est *généralement* de même signe que celle de la formule de Poncelet et de signe contraire à celle de la formule (4).

2° La formule (4), qui donne toujours un résultat plus approché que celle de Poncelet, partage, sous le rapport de l'exactitude, le premier rang à peu près également avec la formule de Simpson; on peut même dire qu'elle a pour elle la probabilité d'une plus grande exactitude, car, lorsqu'elle quitte le premier rang, elle garde le second, tandis que la formule de Simpson, remarquablement exacte dans certains cas, accuse de bien plus grands écarts, puisqu'elle descend au troisième rang chaque fois qu'elle n'occupe pas le premier.

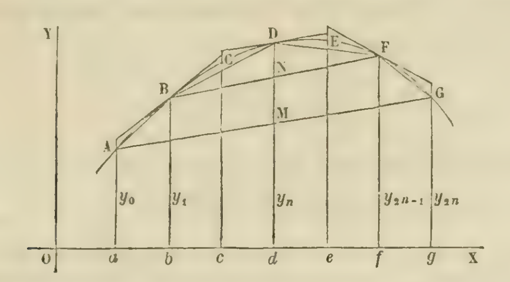
On peut donc légitimement conclure que la formule (4) joint l'exactitude de la formule de Simpson, dont elle ne diffère pas essentiellement, à la simplicité de celle de Poncelet, dont elle a gardé la forme.

On a souvent attaché, avec raison, une certaine importance à la limite déterminée par Poncelet pour l'erreur à laquelle peut conduire l'emploi de sa formule. Rappelons qu'on obtient cette formule en prenant la

---

(*) Ces huit exemples pourraient, à la vérité, être réduits à cinq bien distincts, à cause de la grande analogie qui règne entre les trois premiers, ainsi qu'entre le sixième et le septième; mais nos conclusions ne seraient pas modifiées par la suppression des exemples n°s 2, 3 et 7.

moyenne $\frac{A + A'}{2}$ entre l'aire inscrite et l'aire circonscrite, les cordes et les tangentes étant disposées comme dans la figure suivante (*) :



La différence entre l'aire exacte et l'aire $\frac{A + A'}{2}$ est évidemment moindre que la différence entre cette aire moyenne et l'une des extrêmes dont elle diffère de $\frac{A' - A}{2}$. L'erreur ε est donc moindre que $\frac{A' - A}{2}$, et l'on a, en remplaçant A et A' par leurs valeurs,

$$h\left(2\Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}\right) \quad \text{et} \quad 2h\Sigma y_i,$$

$$\lim \varepsilon = h\left(\frac{y_1 + y_{2n-1}}{4} - \frac{y_0 + y_{2n}}{4}\right),$$

ce qui peut être mis sous la forme

$$\lim \varepsilon = \tfrac{1}{2} h . \mathrm{MN}.$$

Cette expression parle, pour ainsi dire, aux yeux et permet d'apprécier à l'avance la grandeur de l'équidistance h qu'il convient d'adopter.

(*) *Voir* les *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 375-376 ; 1855.

La formule (4) a été obtenue en prenant $\frac{A + 2A'}{3}$, A et A' ayant les mêmes valeurs que ci-dessus. Il est évident que ces aires et les moyennes qui ont conduit aux formules (2) et (4) se présentent dans l'ordre de grandeur suivant :

$$A, \quad \frac{A + A'}{2}, \quad \frac{A + 2A'}{3}, \quad A'.$$

L'aire exacte, toujours plus rapprochée de A' que de A, ne peut se trouver qu'entre $\frac{A + A'}{2}$ et $\frac{A + 2A'}{3}$, ou entre $\frac{A + 2A'}{3}$ et A'. Dans le premier cas, l'erreur est moindre que $\frac{A + 2A'}{3} - \frac{A + A'}{2}$ ou $\frac{1}{6}(A' - A)$ et, dans le second, elle est moindre que $A' - \frac{A + 2A'}{3}$ ou $\frac{1}{3}(A' - A)$. On peut donc affirmer que $\varepsilon < \frac{1}{3}(A' - A)$, ce qui donne

$$\lim \varepsilon = h\left(\frac{y_1 + y_{2n-1}}{6} - \frac{y_0 + y_{2n}}{6}\right)$$

ou

$$\lim \varepsilon = \frac{1}{3} h . \mathrm{MN}.$$

Sous ce rapport la formule (4) n'a donc rien à envier, non plus, à celle de Poncelet.

Note. — Le général Piobert est arrivé de son côté à la formule (4) par des considérations absolument différentes de celles qui m'ont guidé. Comme son travail a paru dans le tome XIII (1854) des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, p. 323, tandis que le mien n'a été inséré que dans le tome XV (1855), qu'il me soit permis d'établir ici mon droit de priorité.

Ainsi que je l'ai dit ci-dessus, ma formule a été publiée pour la première fois dans le n° 16 du *Mémorial de l'Officier du Génie* qui porte le millésime de 1854. Employé au Dépôt des fortifications, j'avais été chargé en 1853 de la mise en ordre et de la publication des Mémoires composant le *Mémorial*, et le n° 16 a paru vers le milieu de 1854, car il était entièrement imprimé avant ma nomination d'aide de camp du

général Niel, avec lequel je partais de Paris le 11 juillet pour l'expédition de la Baltique. Or, ce n'est que dans le fascicule de septembre des *Nouvelles Annales* qu'a été publiée la communication de Piobert qui, vraisemblablement d'ailleurs, n'avait pas connaissance du numéro du *Mémorial de l'Officier du Génie* qui venait de paraître. Th. P.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'artillerie.

PRÉLIMINAIRES.

Nous avons déjà exposé, dans les *Nouvelles Annales*, une théorie géométrique des indices. Dans ce nouveau travail, au lieu de considérer l'indice d'un point d'une droite ou d'un plan par rapport à une surface du second degré, nous étudions les propriétés de ce que nous appelons indice d'un système de deux points, de deux droites et de deux plans. Lorsque ces points, ces droites, ces plans coïncident, on retrouve les indices tels que nous les avons déjà considérés.

Les indices seront, en général, pris par rapport à la surface du second degré S. Nous indiquons les points par les lettres romaines minuscules, les plans par les lettres romaines majuscules, et les droites par les lettres grecques. Les indices étant désignés par l'initiale I, nous écrivons I_a, I_α, I_A pour indiquer l'indice du point a, de la droite α et du plan A; de même $I_{aa'}$, $I_{\alpha\alpha'}$, $I_{AA'}$ indiqueront l'indice du système des points a, a', des droites α, α', et des plans A, A'.

Comme on le verra, toute la théorie des surfaces du second degré est comprise dans un seul théorème, celui que nous appelons *théorème général;* ceux qui suivent n'en sont que des corollaires.

Prenant pour point de départ une définition analy-

tique des indices, notre exposition sera elle-même plus analytique que géométrique.

Nous aurons souvent à considérer les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$. Les faces du premier seront A, B, C, D, et nous désignerons aussi par ces lettres les aires des faces opposées aux sommets de même nom. Les arêtes bc, ca, ab, qui forment la face D, seront représentées par les lettres α, β, γ, et les arêtes da, db, dc respectivement opposées aux premières par λ, μ, ν. Dans le tétraèdre $a'b'c'd'$, ces mêmes lettres affectées d'un accent désigneront les éléments correspondants.

Deux droites μ, μ' étant données, nous désignerons par la notation $|\mu, \mu'|$ le produit de la plus courte distance de la droite μ à la droite μ' par $\sin \mu\mu'$.

DÉFINITIONS.

Définition de l'indice du système de deux points a et a'.

1. *L'indice du système des deux points a et a', par rapport à la surface* S, *est égal et de signe contraire au rapport des distances du plan polaire de l'un des points à l'autre et au centre de la surface.*

Le plan polaire du point a étant désigné par A′, celui du point a' par A, et o étant le centre de S, nous aurons

$$\mathrm{I}_{aa'} = -\frac{(a, \mathrm{A})}{(o, \mathrm{A})} = -\frac{(a', \mathrm{A}')}{(o, \mathrm{A}')}.$$

Définition de l'indice du système de deux droites γ et γ'.

Sur la droite γ, prenons deux points arbitraires a, b; sur la droite γ', prenons deux points a', b', également arbitraires; l'indice du système des droites γ et γ' est exprimé par la relation

$$\mathrm{I}_{\gamma\gamma'} = \frac{1}{ab \cdot a'b'} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{aa'} & \mathrm{I}_{ab'} \\ \mathrm{I}_{ba'} & \mathrm{I}_{bb'} \end{vmatrix}.$$

Définition de l'indice du système de deux plans D *et* D'.

Sur le plan D, *prenons trois points arbitraires* a, b, c; *sur le plan* D', *prenons trois points, également arbitraires,* a', b', c'; *l'indice du système des plans* D *et* D' *est exprimé par la relation*

$$I_{DD'} = \frac{1}{4abc.a'b'c'} \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Deux points étant conjugués à la surface S lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre; deux droites étant conjuguées à la surface S lorsque la polaire de l'une rencontre l'autre; deux plans étant conjugués lorsque le pôle de l'un est situé dans l'autre, nos définitions montrent que l'indice du système de deux points ou de deux plans, conjugués à la surface S, est nul, et que l'indice du système de deux droites conjuguées à S est nul aussi.

Lorsque l'un des points a ou a' coïncide avec le centre o, l'indice $I_{aa'} = -1$.

2. Théorème général. — *Étant pris dans l'espace deux groupes de* m *points* $abcd\ldots m$, $a'b'c'd'\ldots m'$, *posons*

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \ldots & I_{am'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \ldots & I_{bm'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{ma'} & I_{mb'} & \ldots & I_{mm'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & \ldots & m \\ a' & b' & c' & \ldots & m' \end{vmatrix}.$$

1° *Lorsque* m *est plus grand que* 4,

$$\Delta_m = 0;$$

2° *Lorsque* $m = 4$, *si* π *est le produit des demi-axes*

de la surface S,

$$\Delta_4 = -\frac{36\, abcd \,.\, a'b'c'd'}{\pi^2};$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* D *et* D' *les plans des triangles* abc, $a'b'c'$,

$$\Delta_3 = 4\, abc \,.\, a'b'c'\, \mathrm{I}_{\mathrm{DD'}};$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* γ *et* γ' *les directions des segments* ab, $a'b'$,

$$\Delta_2 = ab \,.\, a'b'\, \mathrm{I}_{\gamma\gamma'}.$$

Démonstration. — Si l'on représente par x_r, y_r, z_r les coordonnées du $r^{ième}$ point du premier groupe, par x'_s, y'_s, z'_s les coordonnées du $s^{ième}$ point du second groupe, l'indice du système de ces deux points, par rapport à la surface S, rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

a pour expression

$$\frac{x_r x'_s}{\alpha^2} + \frac{y_r y'_s}{\beta^2} + \frac{z_r z'_s}{\gamma^2} - 1,$$

de sorte que, en ayant égard à la règle en usage pour multiplier les déterminants,

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\alpha} & \frac{y_1}{\beta} & \frac{z_1}{\gamma} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{x_2}{\alpha} & \frac{y_2}{\beta} & \frac{z_2}{\gamma} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{x_n}{\alpha} & \frac{y_n}{\beta} & \frac{z_n}{\gamma} & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x'_1}{\alpha} & \frac{y'_1}{\beta} & \frac{z'_1}{\gamma} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{x'_2}{\alpha} & \frac{y'_2}{\beta} & \frac{z'_2}{\gamma} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{x'_n}{\alpha} & \frac{y'_n}{\beta} & \frac{z'_n}{\gamma} & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Or : 1° si m est plus grand que 4, chaque déterminant est nul ;

2° Si $m = 4$, le premier déterminant a pour valeur $\pm \frac{6abcd}{\pi}$, le second a pour valeur $\mp \frac{6a'b'c'd'}{\pi}$; de là résulte la valeur de Δ_4.

3° Dans le déterminant Δ_4, prenons pour le point d' le pôle du plan D, qui passe par les trois points a, b, c; ces points étant conjugués au point d', on a

$$I_{ad'} = I_{bd'} = I_{cd'} = 0,$$

de sorte que

$$\Delta_4 = \Delta_3 I_{dd'}.$$

Or, si D' représente le plan $a'b'c'$,

$$3abcd = abc(d, D), \quad 3a'b'c'd' = a'b'c'(d', D').$$

Substituant ces valeurs dans Δ_4, on obtient la relation

$$(1) \qquad \frac{\Delta_3}{4abc.a'b'c'} = -\frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2 I_{dd'}}.$$

Le second membre de cette relation étant indépendant des points a, b, c, a', b', c', la valeur du premier l'est aussi, et ainsi se trouve justifiée notre définition de l'indice du système de deux plans.

4° Dans le déterminant Δ_3, prenons le point c' sur la polaire de la droite ab; on aura

$$I_{ac'} = I_{bc'} = 0,$$

de sorte que

$$\Delta_3 = \Delta_2 I_{cc'}.$$

Or, si γ et γ' représentent les droites ab, $a'b'$,

$$2abc = ab(c, \gamma), \quad 2a'b'c' = a'b'(c', \gamma').$$

Substituant ces valeurs dans Δ_3, on obtient la relation

$$(2) \qquad \frac{\Delta_2}{ab.a'b'} = \frac{(c, \gamma)(c', \gamma')}{I_{cc'}} I_{DD'}.$$

Le second membre de cette relation étant indépendant

des points a, b, a', b', la valeur du premier l'est aussi, et ainsi se trouve justifiée notre définition de l'indice du système de deux droites.

3. D'après la relation (1), on a, le point d' étant le pôle du plan D,

$$I_{DD'} = -\frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2 I_{dd'}};$$

mais $I_{dd'} = -\frac{(d, D)}{(o, D)}$, de sorte que $I_{DD'} = \frac{(o, D)(d', D')}{\pi^2}$; d'où l'on voit que *l'indice du système de deux plans est égal à la distance du centre de la surface* S *à l'un des plans, multipliée par la distance du pôle de ce plan à l'autre plan, divisée par le carré du produit des demi-axes de la surface.*

4. Lorsque l'un des plans, D' par exemple, passe par le centre o de la surface S, on déduit de la valeur précédente

$$I_{DD'} = -\frac{\delta_0'^2 \sin(\delta', D)\sin(\delta', D')}{\pi^2} = -\frac{\sin(\delta', D')}{D_0^2 \sin(\delta', D)},$$

δ'_0 étant la longueur du demi-diamètre conjugué au plan D, δ' la direction de ce diamètre, D_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan D.

5. D'après la relation (2), on a aussi

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{(c, \gamma)(c', \gamma')}{I_{cc'}} I_{DD'}.$$

Dans cette expression, c est un point quelconque; c' est un point pris arbitrairement sur la polaire de la droite γ, D est le plan qui passe par le point c et la droite γ, D' est le plan qui passe par le point c' et la droite γ'. Prenons pour le point c le centre o de la surface S, et pour le point c' la trace de la polaire de la droite γ sur le plan diamétral qui passe par la droite γ'. Les plans D, D' étant

des plans diamétraux, si ν' est la polaire de la droite γ.
la relation (n° 4) donne

$$I_{DD'} = -\frac{\sin(\nu', D')}{D_0^2 \sin(\nu', D)},$$

D_0 désignant le produit des demi-axes de la section diamétrale D; et, puisque $I_{cc'} = -1$, nous avons

$$I_{\gamma\gamma'} = (o, \gamma)(c', \gamma')\frac{\sin(\nu', D')}{D_0^2 \sin(\nu', D)}.$$

Soit ν'_0 le demi-diamètre parallèle à la polaire ν',

$$\pi = D_0 \nu'_0 \sin(\nu', D);$$

d'autre part, on voit que $(c', \gamma')\sin(\nu', D')$ est égal à la plus courte distance de la polaire ν' à la droite γ', multipliée par le sinus de l'angle des droites ν', γ'. Si nous indiquons par la notation $|\nu', \gamma'|$ ce produit, on a donc

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{(o, \gamma)|\nu', \gamma'|\nu'_0}{\pi D_0}.$$

L'indice du système de deux droites γ, γ' est égal à la distance du centre à l'une des droites γ, multipliée par la plus courte distance de la polaire ν' de la droite γ à la droite γ', par le sinus de l'angle des droites $\nu'\gamma'$ et par le demi-diamètre parallèle à la polaire, divisée par le produit des demi-axes de la section diamétrale qui passe par γ, et par le produit des demi-axes de la surface.

6. Si la droite γ est un diamètre

$$I_{\gamma\gamma'} = -\frac{\sin(\gamma', B')}{\gamma_0^2 \sin(\gamma, B')} = -\frac{B_0'^2 \sin(\gamma', B')\sin(\gamma, B')}{\pi^2},$$

B' indiquant la direction du plan conjugué au diamètre γ; γ_0 la longueur du demi-diamètre déterminé

par γ; et B'_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale conjuguée à γ.

En effet, si dans le déterminant Δ_2 on fait coïncider le point a avec le centre o,

$$I_{aa'} = I_{ab'} = -1,$$

de sorte que

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{I_{ba'} - I_{bb'}}{ob \cdot a'b'}.$$

Mais, si B' est le plan polaire du point b,

$$I_{\gamma\gamma'} = \frac{(b', B') - (a', B')}{(o, B')\, ob \cdot a'b'},$$

d'où l'on déduit la relation indiquée en remarquant que

$$\frac{(o, B')\, ob}{\sin(\gamma, B')} = \gamma_0^2, \quad (b', B') - (a', B') = b'a' \sin(\gamma', B').$$

7. On doit remarquer que cette valeur de $I_{\gamma\gamma'}$ ne change pas lorsque, le diamètre γ restant fixe, la seconde droite γ' se meut parallèlement à elle-même. De même la valeur (n° 4) de $I_{DD'}$, lorsque D' est un plan diamétral, ne change pas lorsque, D' restant fixe, le plan D se meut parallèlement à lui-même.

8. *Étant pris deux groupes de m plans* ABC... M; A'B'C'... M', *posons*

$$\nabla_m = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \dots & I_{AM'} \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \dots & I_{BM'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{MA'} & I_{MB'} & \dots & I_{MM'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C & \dots & M \\ A' & B' & C' & \dots & M' \end{vmatrix}.$$

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $\nabla_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 4$, *si l'on désigne par* A, B, C, D *les aires des faces du tétraèdre formé par ces plans, et par* V *le volume de ce tétraèdre; par* A', B', C', D' *les aires*

des faces du tétraèdre formé par ces plans, et par V′ *son volume,*

$$\Delta_4 = -\frac{1}{\pi^6}\,\frac{(3V)^3}{2\,ABCD}\,\frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* sin ABC, sin A′B′C′ *les sinus des angles formés par les normales extérieures aux faces des trièdres* ABC, A′B′C′ *et par* d, d' *les sommets de ces trièdres,*

$$\nabla_3 = \frac{1}{\pi^4}\sin ABC . \sin A'B'C'\, I_{dd'}.$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* ν, ν' *les droites* AB, A′B′,

$$\nabla_2 = -\frac{1}{\pi^2}\sin AB\ \sin A'B'\, I_{\nu\nu'}.$$

Démonstration. — Lorsqu'on a deux plans M, N et les pôles m, n de ces plans par rapport à la surface S, nos définitions montrent que

$$I_{mn} = -\pi^2\,\frac{I_{MN}}{(o, M)(o, N)}.$$

1° Pour démontrer le 1° du théorème, nous supposerons que les points a, b, ..., m; a', b', ..., m', qui figurent dans le déterminant Δ_m, sont les pôles des plans A′ B′... M′; AB... M, qui figurent dans le déterminant ∇_m. Si l'on remplace dans Δ_m les indices des systèmes de points par leurs valeurs déduites de la relation précédente, on obtient le déterminant ∇_m multiplié par un certain facteur. Il en résulte $\nabla_m = 0$ pour m plus grand que 4.

Pour démontrer les autres parties du théorème, nous utiliserons cette propriété des déterminants : tout mineur de l'ordre p que l'on peut former avec les éléments du déterminant réciproque d'un déterminant est égal au

mineur complémentaire dans le déterminant primitif multiplié par la puissance $p - 1$ de ce déterminant.

Désignons par A, B, C, D les aires des faces du tétraèdre *abcd*, opposées aux sommets de même nom; par A', B', C', D' celles du tétraèdre $a'\,b'\,c'\,d'$. Le déterminant réciproque du déterminant Δ_4 a pour éléments

$$\begin{array}{cccc} 4AA'I_{AA'} & 4AB'I_{AB'} & \ldots & 4AD'I_{AD'}, \\ 4BA'I_{BA'} & 4BB'I_{BB'} & \ldots & 4BD'I_{BD'}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots, \\ 4DA'I_{DA'} & 4DB'I_{DB'} & \ldots & 4DD'I_{DD'}. \end{array}$$

2° Il résulte de là que le déterminant réciproque du déterminant Δ_4 a pour valeur $4^4 ABCD\ A'B'C'D'\nabla_4$; mais ce réciproque a aussi pour valeur le cube de Δ_4; égalant ces deux expressions, on en déduit

$$\nabla_4 = \frac{\Delta_4^3}{4^4 ABCD . A'B'C'D'};$$

remplaçant Δ_4 par sa valeur (n° 2), on obtient la relation 2°.

3° Considérons le mineur du troisième ordre du déterminant réciproque que l'on obtient en supprimant dans ce déterminant les éléments où figurent les plans D et D'; ce mineur a pour valeur $4^3 ABC\ A'B'C'\nabla_3$; il est donc aussi égal au mineur complémentaire $I_{dd'}$, dans le déterminant primitif Δ_4, multiplié par le carré de ce déterminant : de là

$$4^3 ABC\ A'B'C'\ \nabla_3 = I_{dd'}\Delta_4^2;$$

remplaçant Δ_4 par sa valeur et remarquant que

$$\sin ABC = \frac{(3V)^2}{2\,ABC}, \quad \sin A'B'C' = \frac{(3V')^2}{2\,A'B'C'},$$

on obtient la relation 3°.

4° Considérons le mineur du deuxième ordre du dé-

terminant réciproque que l'on obtient en supprimant dans ce déterminant les éléments où figurent les plans C, D, C', D'; ce déterminant a pour valeur $4^2 \mathrm{A\,B\,A'\,B'} \nabla_2$; il est donc égal au mineur complémentaire $\begin{vmatrix} \mathrm{I}_{cc'} & \mathrm{I}_{cd'} \\ \mathrm{I}_{dc'} & \mathrm{I}_{dd'} \end{vmatrix}$ dans le déterminant primitif Δ_4 multiplié par ce déterminant : de là

$$4^2 \mathrm{AB\,A'B'}\, \nabla_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{cc'} & \mathrm{I}_{cd'} \\ \mathrm{I}_{dc'} & \mathrm{I}_{dd'} \end{vmatrix} \Delta_4 = cd \,.\, c'd'\, \mathrm{I}_{\nu\nu'}\, \Delta_4,$$

en désignant par ν l'arête cd intersection des plans A, B et par ν' l'arête $c'd'$ intersection des plans A', B'. Remplaçant Δ_4 par sa valeur et remarquant que

$$2\,\mathrm{AB} \sin \mathrm{AB} = 3\,\mathrm{V}\, cd, \quad 2\,\mathrm{A'B'} \sin \mathrm{A'B'} = 3\,\mathrm{V'}\, c'd',$$

on obtient la relation 4°.

9. Théorème. — *Étant pris dans l'espace deux groupes de m droites $\alpha\beta \ldots \mu$; $\alpha'\beta' \ldots \mu'$, les premières passant par le point p, les secondes par le point p', nous poserons*

$$\delta_m = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\alpha\alpha'} & \mathrm{I}_{\alpha\beta'} & \ldots & \mathrm{I}_{\alpha\mu'} \\ \mathrm{I}_{\beta\alpha'} & \mathrm{I}_{\beta\beta'} & \ldots & \mathrm{I}_{\beta\mu'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{I}_{\mu\alpha'} & \mathrm{I}_{\mu\beta'} & \ldots & \mathrm{I}_{\mu\mu'} \end{vmatrix}.$$

1° *Lorsque m est plus grand que* 3, $\delta_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* $\sin \alpha\beta\gamma$, $\sin \alpha'\beta'\gamma'$ *les sinus des angles solides formés par les directions* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$,

$$\delta_3 = -\frac{\sin \alpha\beta\gamma \,.\, \sin \alpha'\beta'\gamma'}{\pi^2}\, \mathrm{I}^2_{pp'}.$$

3° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* D *et* D' *les plans* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$,

$$\delta_2 = \sin \alpha\beta \,.\, \sin \alpha'\beta'\, \mathrm{I}_{pp'}\, \mathrm{I}_{\mathrm{DD'}}.$$

Démonstration. — Prenons sur les droites du premier faisceau les points $a, b, \ldots, m$, et sur les droites du second faisceau les points $a', b', \ldots, m'$; à l'aide de ces deux groupes de m points et des points p et p' formons le déterminant Δ_{m+1} :

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \ldots & I_{am'} & I_{ap'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \ldots & I_{bm'} & I_{bp'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{pa'} & I_{pb'} & \ldots & I_{pm'} & I_{pp'} \end{vmatrix}.$$

Multiplions par $I_{pp'}$ tous les termes des m premières lignes de ce déterminant, retranchons ensuite des $1, 2, \ldots, m^{\text{ièmes}}$ lignes du nouveau déterminant les produits des éléments correspondants de la dernière successivement par $I_{ap'}, I_{bp'}, \ldots, I_{mp'}$. Les termes de la première ligne sont

$$\begin{gathered} I_{aa'}\, I_{pp'} - I_{pa'}\, I_{ap'} = pa\,.p'a'\, I_{\alpha\alpha'}, \\ I_{ab'}\, I_{pp'} - I_{pb'}\, I_{ap'} = pa\,.p'b'\, I_{\alpha\beta'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_{am'}\, I_{pp'} - I_{pm'}\, I_{ap'} = pa\,.p'm'\, I_{\alpha\mu'}, \\ I_{ap'}\, I_{pp'} - I_{pp'}\, I_{ap'} = 0 ; \end{gathered}$$

ceux de la seconde sont

$$\begin{gathered} I_{ba'}\, I_{pp'} - I_{pa'}\, I_{bp'} = pb\,.p'a'\, I_{\beta\alpha'}, \\ I_{bb'}\, I_{pp'} - I_{pb'}\, I_{bp'} = pb\,.p'b'\, I_{\beta\beta'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_{bm'}\, I_{pp'} - I_{pm'}\, I_{bp'} = pb\,.p'm'\, I_{\beta\mu'}, \\ I_{bp'}\, I_{pp'} - I_{pp'}\, I_{bp'} = 0 ; \end{gathered}$$

et l'on a des résultats analogues pour les autres lignes.

Tous les termes de la dernière colonne étant nuls, sauf le terme $I_{pp'}$, nous avons

$$\Delta_{m+1}\, I^{m}_{pp'} = I_{pp'}\, \delta_m\, QQ'.$$

en posant

$$Q = pa.pb\ldots pm, \quad Q' = p'a'.p'b'\ldots p'm' :$$

de là

$$\delta_m = \frac{\Delta_{m+1} I_{pp'}^{m-1}}{QQ'}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 3, $\Delta_{m+1} = 0$: donc aussi $\delta_m = 0$.

2° Lorsque $m = 3$, $\delta_3 = \dfrac{\Delta_4 I_{pp'}^2}{pa.pb.pc.p'a'.p'b'.p'c'}$; or

$$\Delta_4 = -\frac{36 pabc.p'a'b'c'}{\pi^2}$$

$$= -\frac{\sin\alpha\beta\gamma.\sin\alpha'\beta'\gamma'\, pa.pb.pc.p'a'.p'b'.p'c'}{\pi^2};$$

de là résulte la relation 2°.

3° Lorsque $m = 2$,

$$\delta_2 = \frac{\Delta_3 I_{pp'}}{pa.pb.p'a'.p'b'};$$

or

$$\Delta_3 = 4pab.p'a'b' I_{DD'} = \sin\alpha\beta \sin\alpha'\beta'.pa.pb.p'a'.p'b' I_{DD'},$$

en désignant par D et D′ les plans pab, $p'a'b'$ ou $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$. De là résulte la relation 3°. (*A suivre.*)

QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION (ANNÉE 1875);

SOLUTION D'UN ANONYME.

Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la somme m^2 des carrés de la hauteur h, qui correspond au côté a, et de la différence des deux autres côtés, $h^2 + (b - c)^2 = m^2$.

Des propositions bien connues donnent

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

et

$$bc = \frac{ah}{\sin A} = \frac{ah}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Il s'ensuit

$$a^2 = (b-c)^2 + 2ah\,\text{tang}\,\frac{A}{2} = (b+c)^2 - 2ah\cot\frac{A}{2};$$

d'où

$$(1)\quad (b-c)^2 = a^2 - 2ah\,\text{tang}\,\frac{A}{2} = a\left(a - 2h\,\text{tang}\,\frac{A}{2}\right),$$

$$(2)\quad (b+c)^2 = a^2 + 2ah\cot\frac{A}{2}.$$

En remplaçant $(b-c)^2$ par $a^2 - 2ah\,\text{tang}\,\frac{A}{2}$, l'égalité supposée $h^2 + (b-c)^2 = m^2$ devient

$$(3)\quad h^2 - 2ah\,\text{tang}\,\frac{A}{2} + a^2 - m^2 = 0.$$

Pour que le triangle à résoudre existe, il faut et il suffit que les valeurs de $(b-c)$ et de $(b+c)$ déduites des équations (1), (2), (3) soient réelles et qu'en outre on ait $b - c < a$, et $b + c > a$. Ce qui exige, d'après les équations (1) et (2), que la valeur de h soit réelle, positive, moindre que $\frac{a}{2\,\text{tang}\,\frac{A}{2}}$, ou, au plus égale à $\frac{a}{2\,\text{tang}\,\frac{A}{2}}$. A toute racine de l'équation (3) satisfaisant à ces conditions correspond nécessairement une solution réelle

de la question proposée. Lorsque $h = \frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}$, on a $(b-c)^2 = 0$, $b = c$; le triangle considéré est isoscèle. Cela posé et admis, nous distinguerons, dans la discussion du problème, ces trois cas : $a^2 - m^2 < 0$, $= 0$, > 0.

1° Soit $a^2 - m^2 < 0$. Les racines de l'équation (3) sont réelles et de signes contraires, et comme, en remplaçant h par o, le premier membre de cette équation se réduit à la quantité négative $a^2 - m^2$, il faut, pour que la racine positive satisfasse à la condition $h \leqq \frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}$, que le résultat de la substitution de $\frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}$ à h soit positif, ou égal à zéro, ce qui donne

$$\left(\frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 \geqq 0,$$

d'où

$$\tan \frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2m}.$$

Ainsi, dans l'hypothèse $a^2 - m^2 < 0$, la question n'admet aucune solution lorsqu'on a $\tan \frac{A}{2} > \frac{a}{2m}$; et elle en admet une, et une seule pour $\tan \frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2m}$. Quand $\tan \frac{A}{2} = \frac{a}{2m}$, on a

$$\left(\frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 = 0, \quad h = \frac{a}{2 \tan \frac{A}{2}}, \quad (b-c)^2 = 0, \ b = c,$$

le triangle est isoscèle.

2° $a^2 - m^2 = 0$. Les racines de l'équation (3) sont o et $2a \tan\frac{A}{2}\cdot$ La condition relative à la racine positive $2a \tan\frac{A}{2}$ devient

$$2a \tan\frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}, \quad \text{ou} \quad \tan\frac{A}{2} \leqq \frac{1}{2}.$$

Donc, lorsqu'on a $a^2 - m^2 = 0$, il faut et il suffit, pour que la question proposée admette une solution, qu'on ait $\tan\frac{A}{2} \leqq \frac{1}{2}\cdot$ Si $\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, la racine positive $2a \tan\frac{A}{2} = \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$, et le triangle considéré est isoscèle.

3° $a^2 - m^2 > 0$. La condition de réalité des racines h', h'' de l'équation (3), est $a^2 \tan^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) \geqq 0$. Quand cette condition est remplie, les racines h', h'' sont positives, inégales ou égales suivant qu'on a

$a^2 \tan^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > 0$, ou $a^2 \tan^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) = 0$.

Admettons d'abord l'inégalité

$$a^2 \tan^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > 0,$$

soit $h' < h''$.

Le résultat $\left(\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2$ de la substitution de $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$ à h dans le premier membre de l'équation (3) peut être négatif, nul, ou positif; ce sont trois cas distincts que nous allons successivement considérer.

Soit $\left(\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 < 0$ (*). L'une des racines, h', est comprise entre o et $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$, l'autre racine h'' est plus grande que $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$. La première donne une solution de la question proposée, la seconde est inadmissible.

Si $\left(\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 = 0$. L'équation (3) a une racine égale à $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$; correspondant à un triangle isoscèle. La seconde racine est égale à $2a\tan\frac{A}{2} - \frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$; pour qu'elle soit moindre que $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}$, il faut qu'on ait $\tan\frac{A}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}}$. Quand cette inégalité a lieu, la question admet deux solutions. Elle n'admet qu'une seule solution si $\tan\frac{A}{2}$ surpasse $\sqrt{\frac{1}{2}}$. L'égalité $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ est impossible, parce que les deux racines h', h'' sont supposées inégales.

(*) Pour que les inégalités $\left(\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 < 0$, $a^2 - m^2 > 0$ existent simultanément, il faut que l'on ait $\frac{a}{2\tan\frac{A}{2}} < a$; $\tan\frac{A}{2} > \frac{1}{2}$.

Soit $\left(\frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}\right)^2 - m^2 > o$. En substituant $a\tang\frac{A}{2}$ à l'inconnue h, le premier membre de l'équation (3) devient $a^2 - m^2 - a^2\tang^2\frac{A}{2}$ quantité négative, d'après l'hypothèse $a^2\tang^2\frac{A}{2} - (a^2 - m^2) > o$. Il en faut conclure que l'équation (3) a une racine comprise entre o et $a\tang\frac{A}{2}$, et que l'autre racine est comprise entre $a\tang\frac{A}{2}$ et $\frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$. Lorsqu'on a

$$a\tang\frac{A}{2} < \frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$$

d'où

$$\tang\frac{A}{2} < \sqrt{\frac{1}{2}},$$

ces deux racines sont moindres que $\frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$, et la question a deux solutions. Si, au contraire, on a

$$a\tang\frac{A}{2} > \frac{a}{2\tang\frac{A}{2}},$$

les deux racines sont, l'une et l'autre, plus grandes que $\frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$, et la question n'admet aucune solution. L'égalité $a\tang\frac{A}{2} = \frac{a}{2\tang\frac{A}{2}}$ ne peut exister, puisque les sub-

stitutions de $a \tang \frac{A}{2}$ et de $\frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}$ à h donnent des résultats de signes contraires.

Actuellement, supposons que

$$a^2 \tang^2 \frac{A}{2} - (a^2 - m^2) = 0,$$

d'où

$$h' = h'' = a \tang \frac{A}{2}.$$

Suivant qu'on aura

$$a \tang \frac{A}{2} \leqq \frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}} \quad \text{ou} \quad a \tang \frac{A}{2} > \frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}},$$

la question admettra une solution ou n'en admettra aucune. Si $a \tang \frac{A}{2} = \frac{a}{2 \tang \frac{A}{2}}$, le triangle proposé est isoscèle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Chadu.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES (1875),

SOLUTION ANALYTIQUE;

PAR M. A. TOURRETTES.

On donne un ellipsoïde, un plan et un point dans ce plan. On demande le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde, et dont la trace dans le plan donné admet le point donné pour foyer.

Je prends le plan des xy parallèle au plan donné et passant par le centre de l'ellipsoïde; dans ce plan, je prends pour ox, oy les axes de la section et pour oz un diamètre conjugué du plan xy.

L'ellipsoïde aura pour équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et le plan donné $z = h$.

Soient α, β, γ les coordonnées du sommet d'un des cônes circonscrits, son équation sera

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Prenons son intersection avec le plan $z = h$, et développons :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)x^2 - \frac{2\alpha\beta}{a^2 b^2}xy \\ &\quad + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)y^2 - 2\frac{\alpha}{a^2}\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right)x \\ &\quad - 2\frac{\beta}{b^2}\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right)y \\ &\quad + \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

C'est l'équation de la projection de l'intersection sur le plan xy; exprimons qu'elle admet pour foyer le point (x_0, y_0).

Or, étant donnée l'équation générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

on a les foyers par la résolution des deux équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &(B^2 - AC)xy + (BD - AE)x \\ &\quad + (BE - CD)y + BF - DE = 0, \\ &(B^2 - AC)(x^2 - y^2) + 2(BE - CD)x \\ &\quad - 2(BD - AE)y + (A - C)F + E^2 - D^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

dans lesquelles x, y sont les coordonnées d'un foyer.

Formons les coefficients des deux équations

$$\begin{aligned} B^2 - AC &= -\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) \\ &= -H\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$H = \frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right),$$

$$BD - AE = H\beta\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right), \quad BE - CD = H\alpha\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right),$$

$$BF - DE = -H\alpha\beta\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right),$$

$$\begin{aligned} &(A - C)F + E^2 - D^2 \\ &= H\left\{\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)\left[(\beta^2 - \alpha^2) - (a^2 - b^2)\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right)\right]\right. \\ &\qquad\qquad \left. + (a^2 - b^2)\left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right)^2\right\} \\ &= H\left[\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right)(\beta^2 - \alpha^2) + \frac{a^2 - b^2}{c^2}(\gamma - h)^2\right]. \end{aligned}$$

Je substitue ces valeurs dans les équations (3); j'exprime qu'elles sont satisfaites par les coordonnées x_0, y_0, et je supprime le facteur $\frac{1}{a^2 b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) = H$, qui, égalé à zéro, donne l'ellipsoïde proposé. Il vient

alors

$$\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) x_0 y_0 + \beta \left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right) x_0$$
$$+ \alpha \left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right) y_0 - \alpha\beta \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) = 0,$$

$$- \left(\frac{\gamma^2}{c^2} - 1\right) (x_0^2 - y_0^2) + 2\alpha \left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right) x_0$$
$$- 2\beta \left(\frac{\gamma h}{c^2} - 1\right) y_0 + \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) (\beta^2 - \alpha^2)$$
$$+ \frac{a^2 - b^2}{c_2} (\gamma - h)^2 = 0.$$

Ce sont les équations du lieu demandé. Remplaçons α, β, γ par x, y, z et ordonnons, il vient

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & x_0 y_0 \frac{z^2}{c^2} + \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) xy - \frac{h x_0}{c_2} yz - \frac{h y_0}{c^2} xz \\ & \qquad + x_0 y + y_0 x - x_0 y_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) (y^2 - x^2) + (a^2 - b^2 - x_0^2 + y_0^2) \frac{z^2}{c^2} \\ & \qquad - 2 \frac{h y_0}{c^2} yz + 2 \frac{h x_0}{c^2} xz - 2 x_0 x + 2 y_0 y \\ & \qquad - 2 \frac{a^2 - b^2}{c^2} hz + (x_0^2 - y_0^2) + \frac{a^2 - b^2}{c^2} h^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées du centre sont, dans les deux surfaces (4) et (5),

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = h;$$

c'est le point fixe. Si nous transportons l'origine en ce point, nous trouvons

$$x_0 y_0 \frac{z^2}{c^2} + \left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) xy - \frac{h x_0}{c^2} yz - \frac{h y_0}{c^2} xz = 0,$$

$$\left(\frac{h^2}{c^2} - 1\right) (y^2 - x^2) + (a^2 - b^2 - x_0^2 + y_0^2) \frac{z^2}{c^4}$$
$$- \frac{2 h y_0}{c^2} yz + \frac{2 h x_0}{c^2} xz = 0.$$

Ces équations représentent deux cônes concentriques. En les coupant par le plan $z = \lambda$, on trouve deux hyperboles équilatères concentriques : la première a pour asymptotes deux parallèles aux axes des coordonnées; la deuxième a pour asymptotes les parallèles aux bissectrices des axes menés par le centre commun. Il est alors visible que ces deux hyperboles se coupent en deux points réels, et en deux points imaginaires. Par suite, le lieu demandé est l'ensemble de deux droites réelles passant par le point donné $x_0 y_0 h$.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

Par M. A. GENTY.

Un foyer d'une conique pouvant être considéré comme le point d'intersection de deux tangentes menées à cette conique par les points imaginaires du cercle, situés à l'infini dans son plan, on voit que la question à résoudre n'est qu'un cas particulier du problème plus général suivant :

Étant donnés un ellipsoïde, un plan P *et deux droites dans ce plan se coupant au point* A, *trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde, et tels que la section de chacun de ces cônes par le plan* P *soit tangente aux droites données.*

Dans le cas général, le lieu se compose évidemment des quatre droites, intersections deux à deux des plans tangents menés à l'ellipsoïde donné par les droites données.

Dans le problème proposé, ces quatre droites sont

celles qui joignent le point donné aux foyers de la section du cône circonscrit à l'ellipsoïde et ayant son sommet en ce point, par un plan parallèle au plan donné.

Note. — La même question a été résolue par MM. Chadu; Wisselink; Gambey; A. Tournois; L. Dunan, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Tours (classe de M. Pellet).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (1875, 1re SESSION)

(voir 2e série, t. XIV, p. 427);

SOLUTION DE M. W.-H. WISSELINK,

A Heerenween (Pays-Bas).

Étant donnés deux axes rectangulaires OX, OY, *et sur l'axe* OX *un point* A, *on considère les hyperboles équilatères qui passent par le point* A, *et dont l'une des directrices est l'axe* OY. *On demande :*

1° *Le lieu de celui des foyers de ces hyperboles qui correspond à la directrice* OY;

2° *Le lieu des centres de ces mêmes hyperboles;*

3° *Le lieu de leurs sommets.*

Prenons pour axes de coordonnées les droites OX, OY, et nommons α, β les coordonnées du foyer qui correspond à la directrice OY.

L'équation générale des courbes du second degré, ayant OY pour directrice et le point (α, β) pour foyer, est

$$\frac{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}{x^2}=e^2$$

ou

$$(1-e^2)x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2=0.$$

Pour que cette équation soit celle d'une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que $(1-e^2)+1=0$, d'où $e^2=2$. Il s'ensuit que l'équation

$$(1) \qquad x^2-y^2+2\alpha x+2\beta y-\alpha^2-\beta^2=0$$

représente toutes les hyperboles équilatères dont OY est une directrice, et le point (α, β) le foyer correspondant.

Soit $OA=p$; les coordonnées du point A seront p et o, et, comme elles doivent vérifier l'équation (1), on aura

$$(2) \qquad \alpha^2+\beta^2-2p\alpha-p^2=0;$$

et, en remplaçant α, β par x, y,

$$x^2+y^2-2px-p^2=0$$

ou

$$(3) \qquad (x-p)^2+y^2=2p^2,$$

équation d'une circonférence, dont les coordonnées du centre sont p et o, et dont le rayon est égal à $p\sqrt{2}$; par conséquent :

1° *Le lieu de celui des foyers des hyperboles considerées qui correspond à la directrice* OY est une circonférence qui a pour centre le point donné A et pour rayon $OA\sqrt{2}$ (*).

Les coordonnées du centre de l'hyperbole représentée

(*) Cela résulte, en effet, de cette proposition connue, que si d'un point A d'une hyperbole on mène, parallèlement aux asymptotes, des droites AD, AD′ rencontrant une directrice OY en D et D′, ces droites sont égales à la distance AF du même point A au foyer F, correspondant à la directrice OY.

Quand l'hyperbole est équilatère, l'angle DAD′ est droit, et le triangle rectangle isoscèle DAD′ donne

$$AD=OA\sqrt{2}, \quad \text{d'où} \quad AF=OA\sqrt{2}. \qquad \text{G.}$$

par l'équation

(1) $$x^2 - y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

s'obtiennent au moyen des équations dérivées

$$x + \alpha = 0, \quad y - \beta = 0.$$

En éliminant α, β entre ces deux équations et l'équation

(2) $$\alpha^2 + \beta^2 - 2p\alpha - p^2 = 0,$$

on a

$$x^2 + y^2 + 2px - p^2 = 0,$$

ou

$$(x + p)^2 + y^2 = 2p^2.$$

Donc .

2° *Le lieu des centres des hyperboles considérées* est une circonférence ayant pour centre le point symétrique du point donné A, par rapport à la directrice OY; le rayon de cette circonférence est égal à OA $\sqrt{2}$ (*).

3° On sait que les tangentes aux sommets d'une hyperbole sont parallèles aux directrices; ainsi, dans le cas actuel, ces tangentes sont parallèles à l'axe OY des ordonnées, et leur coefficient angulaire est infini; ce qui exige que les coordonnées des sommets de l'hyperbole représentée par l'équation (1), réduisent à zéro la dérivée du premier membre de cette équation, prise par rapport à y, ce qui donne

(4) $$-y + \beta = 0, \quad \text{d'où} \quad y = \beta.$$

En éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (4),

(*) C'est une conséquence immédiate de ce que le centre d'une hyperbole équilatère et un foyer sont deux points symétriques par rapport à la directrice OY correspondant au foyer. Il s'ensuit évidemment que les lieux géométriques du centre et du foyer sont, de même, symétriques par rapport à la directrice. (G.)

on trouve, pour le lieu géométrique des sommets, l'équation (double)

$$(5) \qquad (3 \pm 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 \pm \sqrt{2})x - p^2 = 0,$$

qui représente deux ellipses (*).

Note. — M. Lez a résolu la même question.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1875, 2e SESSION)

(voir p. 85);

SOLUTION DE M. J. GRIESS,

Étudiant en Mathématiques à l'École Polytechnique de Zurich.

On donne une circonférence et un point P *sur un de*

(*) La première des équations (5), ou

$$(3 + 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 + \sqrt{2})x - p^2 = 0,$$

est celle qui convient au lieu géométrique du sommet de l'hyperbole équilatère, situé du même côté de la directrice OY que le foyer F correspondant à cette droite. La seconde équation

$$(3 - 2\sqrt{2})x^2 + y^2 - 2p(1 - \sqrt{2})x - p^2 = 0$$

se rapporte à l'autre sommet.

La droite OA est un axe de symétrie commun aux deux ellipses, et le point donné A un sommet commun à ces deux courbes qui passent, l'une et l'autre, par les deux points D, D', où la directrice OY est rencontrée par la circonférence, lieu géométrique du foyer F correspondant.

Ces différentes propriétés, qui se déduisent des équations (5), peuvent être établies directement, en remarquant que, pour obtenir les sommets d'une hyperbole équilatère dont on donne une directrice OY et le foyer F qui lui correspond, il suffit de mener par le foyer F une perpendiculaire à la directrice OY, et de déterminer, sur la direction de cette perpendiculaire, des points dont les distances au foyer et à la directrice soient dans un rapport égal à $\sqrt{2}$. (G.)

ses diamètres AB; *par le point P on mène à cette circonférence la sécante* PCD *qui la rencontre en* C *et en* D, *et par les quatre points* A, B, C, D *on fait passer une hyperbole équilatère :*

1° *Trouver l'équation de cette hyperbole ;*

2° *Trouver le lieu du centre de cette hyperbole, quand la sécante* PCD *tourne autour du point* P;

3° *Trouver, dans les mêmes conditions, le lieu des points de contact des tangentes menées à cette hyperbole, perpendiculairement à* AB;

4° *Indiquer, d'après ce qui précède, la construction géométrique des asymptotes d'une quelconque des hyperboles considérées, et appliquer cette construction au cas où la sécante passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à* AB.

Je prends pour axe des x le diamètre AB, et pour axe des y le diamètre perpendiculaire à AB.

L'équation du cercle est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

L'équation de l'hyperbole équilatère peut s'écrire

$$(2) \qquad x^2 + Bxy - y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

L'hyperbole doit passer par les points A et B; donc, si je fais $y = 0$, l'équation résultante $x^2 + Dx + F = 0$ aura pour racine $+r$ et $-r$, ce qui donne

$$D = 0, \quad F = -r^2,$$

et par suite l'équation (2) devient

$$(3) \qquad x^2 + Bxy - y^2 + Ey - r^2 = 0.$$

Soit a l'abscisse OP du point P, l'équation d'une sécante PCD, menée de ce point, sera

$$y = m(x - a).$$

Les abscisses des points C, D devront vérifier à la fois les équations

$$x^2 + m^2(x - a)^2 - r^2 = 0$$

et

$$x^2 + Bxm(x - a) - m^2(x - a)^2 + Em(x - a) - r^2 = 0.$$

En développant et identifiant ces équations, on trouve

$$B = 2m, \quad E = -2am \text{ (*)},$$

Donc :

1° *L'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par les quatre points* A, B, C, D *est*

$$(4) \qquad x^2 + 2mxy - y^2 - 2amy - r^2 = 0.$$

Les équations du centre de cette hyperbole sont

$$x + my = 0, \quad y - m(x - a) = 0.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on a

$$x^2 + y^2 - ax = 0;$$

par conséquent :

2° *Le lieu du centre de cette hyperbole, quand la sécante* PCD *tourne autour du point* P, *est la circonférence décrite sur* OP *comme diamètre.*

On pouvait le prévoir, car, le coefficient angulaire de la droite $x + my = 0$ étant $-\frac{1}{m}$, on voit que cette

---

(*) En retranchant les équations (1) et (3) membre à membre, il vient

$$2y^2 - Bxy - Ey = 0, \quad \text{d'où} \quad y(2y - Bx - E) = 0;$$

cette dernière équation représente le système des deux cordes AB, CD, communes au cercle et à l'hyperbole. Il en résulte que $2y - Bx - E = 0$, ou $y = \frac{B}{2}x + \frac{E}{2}$ est l'équation de la droite PCD; et, comme la même droite a pour équation $y = mx - am$, on a nécessairement

$$B = 2m, \quad E = -2am. \qquad \text{(G.)}$$

droite est la perpendiculaire abaissée du centre O du cercle sur la sécante, et que le centre M de l'hyperbole est le milieu de la corde CD, ou le sommet d'un angle droit OMP, dont les côtés passent par les deux points fixes P et O.

3° *Lieu des points de contact des tangentes menées aux hyperboles, perpendiculairement à* AB.

Le coefficient angulaire de l'une quelconque de ces tangentes est

$$\frac{-f'_x}{f'_y} = \frac{x + my}{y - m(x - a)}.$$

Pour que cette tangente soit perpendiculaire à AB, qui est l'axe des x, il faut que son coefficient angulaire soit infini, c'est-à-dire que $y - m(x - a) = 0$. Or, les points de l'hyperbole situés sur la droite que l'équation $y - m(x - a) = 0$ représente sont les points C, D d'intersection de la sécante PCD et du cercle; donc le lieu demandé est la circonférence donnée elle-même.

4° *Construction géométrique des asymptotes et application au cas où la sécante* PCD *passe par l'une des extrémités du diamètre perpendiculaire à* AB.

Soit PCD une sécante quelconque : le centre de l'hyperbole est, comme on l'a démontré (2°), le milieu M de la corde CD, qui est par conséquent un diamètre de la courbe. Les tangentes sont, aux extrémités C, D de ce diamètre, perpendiculaires à AB (3°); donc le diamètre conjugué de CD est aussi perpendiculaire à AB. Or, l'hyperbole étant équilatère, les asymptotes sont bissectrices des angles de deux diamètres conjugués; on construira donc les asymptotes en menant par le point M les bissectrices des angles que la sécante forme avec la perpendiculaire abaissée de M sur AB.

Dans le cas particulier où la sécante PCD passe par

l'extrémité D d'un diamètre perpendiculaire à AB, l'angle DOP étant droit, la circonférence décrite sur DP comme diamètre passe par le point O.

Du centre de ce nouveau cercle, je mène une perpendiculaire à OP, qui coupera l'arc OP en son milieu N; puis, du centre M de l'hyperbole, je mène une parallèle à DN : ce sera l'une des deux asymptotes; l'autre lui est perpendiculaire.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez et Wisselink.

CORRESPONDANCE.

I. *Extrait d'une Lettre de M. Bourguet.* — Voici quelques questions qui me paraissent dignes d'être proposées aux lecteurs des *Annales*.

Je représente par

m et n deux demi-cordes normales et perpendiculaires d'une conique;

p^2, q^2 les produits des rayons vecteurs des pieds de ces normales;

r, s les normales arrêtées à l'axe focal;

r', s' les normales arrêtées à l'autre axe;

t, u les rayons de courbure.

Démontrer les relations suivantes :

1° $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2};$$

2° $$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{mab}&=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{pq^2},\\ \frac{1}{nab}&=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{q^2}\right)=\frac{1}{p^2q};\end{aligned}\right.$$

3° $\frac{p}{m} + \frac{q}{n} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;

4° $mp = nq = \frac{p^2q^2}{ab}$;

5° $\frac{p}{t} + \frac{q}{u} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$;

6° $mn = tu$;

7° $mr = ns,\quad mr' = ns',\quad \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}$;

8° $\frac{r}{m} + \frac{s}{n} = 1 + \frac{b^2}{a^2},\quad \frac{r'}{m} + \frac{s'}{n} = 1 + \frac{a^2}{b^2}$;

9° $\frac{r + r'}{m} + \frac{s + s'}{n} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$.

Les relations (2°), dont les autres se déduisent, donnent une expression élégante de la corde normale.

II. M. *E. G.*, ancien élève du lycée de Reims, a résolu les questions 1188, 1191, 1192; M. *de Cuerne*, les questions 1181, 1183; et M. *Bourguet*, les questions 1188, 1189. C'est par oubli que leurs solutions n'ont pas été mentionnées plus tôt.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1197

(voir p. 190);

Par M. Eug. BIARD,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lille.

On donne dans un même plan deux droites parallèles A, B, *et un point* C *situé hors de l'espace limité par les deux parallèles; on mène par le point* C *une sécante rencontrant les droites* A, B *en* a, b; *et sur* ab

comme diamètre on décrit un cercle : démontrer que, si la sécante devient mobile, l'enveloppe de ce cercle est une hyperbole. (HARKEMA.)

Je prends pour axe des x une parallèle OX aux droites A, B et également distante de ces droites ; pour axe des y une perpendiculaire OY à A, B, passant par le point donné C, et rencontrant A, B en des points D, D'.

Soient $2d$ la distance DD' des droites A, B ; c la distance CO du point C à la droite OX, et α l'abscisse variable du point de rencontre O' de la droite mobile Cab avec l'axe OX.

Le point O' est le centre du cercle décrit sur ab comme diamètre, et, si r en est le rayon, l'équation du cercle sera

$$(x-\alpha)^2+y^2=r^2.$$

Exprimons que ce cercle passe par le point a. L'ordonnée de ce point est d, et son abscisse est égale à $\alpha\left(\frac{c-d}{c}\right)$, puisque $\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{OO'}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CO}}$. On a donc

$$\alpha^2\left(\frac{c-d}{c}-1\right)^2+d^2=r^2, \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha^2 d^2}{c^2}+d^2=r^2,$$

et l'équation du cercle devient

$$(x-\alpha)^2+y^2=\frac{\alpha^2 d^2}{c^2}+d^2$$

ou, en ordonnant par rapport à α,

$$(1) \qquad \alpha^2\left(1-\frac{d^2}{c^2}\right)-2\alpha x+x^2+y^2-d^2=0.$$

Pour trouver l'équation de l'enveloppe du cercle, il faut exprimer que l'équation (1) en α admet une racine double. On a ainsi

$$x^2-(x^2+y^2-d^2)\left(1-\frac{d^2}{c^2}\right)=0,$$

d'où

$$(2)\qquad \frac{x^2}{c^2-d^2}-\frac{y^2}{d^2}+1=0,$$

équation d'une hyperbole rapportée à son centre et à ses axes, dont les deux sommets sont les points D, D', où les droites A, B sont rencontrées par la perpendiculaire abaissée du point C sur leurs directions, et dont les foyers sont l'un en C et l'autre au point symétrique de C par rapport à OX.

De là on déduit immédiatement le corollaire :

Si par le foyer F *d'une hyperbole on mène une droite coupant les tangentes aux sommets en des points* t *et* t_1, *le cercle décrit sur* tt_1 *comme diamètre est tangent aux deux branches de l'hyperbole.*

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier; Lez; Sondat; E. Kruschwitz; Moret-Blanc; Gambey; Wisselink; C. Trautmann, étudiant à Strasbourg; Édouard Guillet, maître répétiteur au Lycée de Moulins; Georges Piarron de Mondésir, élève en Mathématiques spéciales au Collége Stanislas; Ch. Degouy, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens (classe de M. Poujade); Leloutre et L. Portail, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Belloc et Berthomieu, du lycée de Bordeaux; Louis Goulin, du lycée Corneille à Rouen (classe de M. Vincent); Barthe et Clautrier, du lycée de Poitiers; J. Lopez, à Cadix.

Question 1198

(voir 2e série, t. XV, p. 192);

PAR M. LOUIS GOULIN,

Elève en Mathématiques spéciales, au lycée Corneille, à Rouen (classe de M. Vincent).

On donne un cercle et un point fixe dans le plan du cercle; des différents points de la circonférence, pris pour centres, on décrit des cercles passant par le point fixe : trouver l'enveloppe des cordes d'intersection

(*réelles ou imaginaires*) *du cercle donné et des cercles décrits.* (HARKEMA.)

Je prends pour axes de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle donné, l'axe des x passant par le point fixe P, dont je désigne l'abscisse par a. L'équation du cercle est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque de ce cercle, on aura

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Le cercle dont le centre est le point (α, β) et qui passe en P a pour équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (a - \alpha)^2 + \beta^2$$

ou

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2a\alpha - a^2 = 0.$$

La corde commune aux cercles (1) et (3) a pour équation

$$(4) \qquad 2\alpha x + 2\beta y - 2a\alpha + a^2 - R^2 = 0.$$

Je prends la dérivée de cette dernière équation, par rapport à α, en y considérant β comme une fonction de α, définie par l'équation (2). J'obtiens ainsi l'équation

$$x - a - \frac{\alpha}{\beta} y = 0$$

ou

$$(5) \qquad (x - a)\beta - \alpha y = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer α et β entre les équations (2), (4), (5). Les deux

dernières donnent

$$\alpha = \frac{(R^2 - a^2)(x - a)}{2[(x - a)^2 + y^2]}, \quad 6 = \frac{(R^2 - a^2)y}{2[(x - a)^2 + y^2]}.$$

En remplaçant α, 6 par ces valeurs dans l'équation (2), il vient

$$(R^2 - a^2)^2[(x - a)^2 + y^2] = 4R^2[(x - a)^2 + y^2]^2;$$

d'où, en supprimant la solution $(x - a)^2 + y^2 = 0$, qui représente le point P,

$$(6) \qquad (x - a)^2 + y^2 = \frac{(a^2 - R^2)^2}{4R^2},$$

équation d'une circonférence ayant pour centre le point donné P et pour rayon $\pm \frac{a^2 - R^2}{2R}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Bourguet; Gambey; Moret-Blanc; Ch. Chadu; Sondat; Wisselink; Tournois; Édouard Guillet, maître répétiteur au lycée de Moulins; Ch. Gouy, élève en Mathématiques spéciales au lycée d'Amiens (classe de M. Poujade); Leloutre, Portail, E. Biard, élèves au lycée de Lille; Clautrier, du lycée de Poitiers (classe de M. Longchamps).

Des solutions géométriques ont été données par MM. Bourguet, Tournois, Chadu et Clautrier.

Question 1202

(voir 2e série, t. XV, p. 191);

Par MM. PAUL et MARÉCHAL,

Élèves en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux.

La somme des puissances d'un point quelconque, par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale à quatre fois la puissance du même point par rapport à la circonférence ayant pour diamètre la droite qui joint les milieux des diagonales. (Laisant.)

Soient a, b, c, d les côtés du quadrilatère; e, f ses diagonales; α, β, γ, δ les distances d'un point quelconque M du plan aux milieux O, O′, O″, O‴ des côtés a, b, c, d. En désignant par P^2 la somme des puissances du point M par rapport aux cercles décrits sur les quatre côtés du quadrilatère, comme diamètres, on a d'abord

$$(1) \qquad P^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

Si l'on représente par $2h$ la longueur de la droite EF qui unit les milieux des diagonales du quadrilatère, une proposition connue donne

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 16\,h^2.$$

De plus, en remarquant que le quadrilatère OO′O″O‴ est un parallélogramme dont les diagonales OO″, O′O‴ se coupent au milieu H de la droite EF, on aura, en désignant par g la distance MH,

$$(3) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 4g^2 + \frac{1}{4}(e^2 + f^2),$$

d'où

$$P^2 = 4g^2 - 4h^2 = 4(g^2 - h^2).$$

Cette dernière égalité démontre la proposition énoncée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Paul Terrier; A. Pellissier; Tournois; Wisselink; Gambey; Moret-Blanc; Bourguet; Lez; Chadu; Launoy; Sondat; Kruschwitz; Charles Richard; Joseph Narino, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille; Biette, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; Barthe et Clautrier, du lycée de Poitiers.

M. Terrier a démontré cette proposition plus générale :

La somme des puissances d'un point quelconque par rapport aux circonférences décrites sur les quatre côtés et sur les deux diagonales d'un quadrilatère, comme diamètres, est égale au double de la somme des puissances du même point, par rapport aux circonférences décrites sur les trois droites qui joignent les milieux des côtés opposés et des diagonales.

QUESTIONS.

1211. On donne sur un plan un point fixe P, un cercle O et un point A sur la circonférence de ce cercle. Une seconde circonférence O′ variable passe constamment par le point A, et son centre est situé sur la circonférence O; déterminer l'enveloppe des polaires du point P, par rapport à O′. (LAISANT.)

1212. Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune de ces droites on prend à partir du point m et des deux côtés de ce point des segments mM, mM′ égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points M, M′ sont des circonférences concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe. (JOSEPH BRUNO.)

1213. Soient A, B, C, D, E les sommets consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle, et M un point quelconque de l'arc AE; démontrer *géométriquement* que

$$\mathrm{MB} + \mathrm{MD} = \mathrm{MA} + \mathrm{MC} + \mathrm{ME}.$$

(BURTAIRE.)

1214. Lieu des centres des coniques touchant une droite en un point donné, et telles qu'un second point donné soit, par rapport à ces coniques, le pôle d'une autre droite aussi donnée. (GAMBEY.)

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DU CENTRE DE GRAVITÉ DU VOLUME DU TRONC DE PRISME DROIT A BASE TRIANGULAIRE ;

PAR M. H. RESAL.

Il n'existe, du moins à ma connaissance, aucun Traité de Statique ou de Mécanique où l'on ait considéré en particulier le tronc de prisme droit à base triangulaire au point de vue de la recherche du centre de gravité de son volume. Ce centre jouit cependant de quelques propriétés intéressantes, que je me propose de faire connaître dans cette Note.

Je prends respectivement pour plan horizontal et pour plan vertical de projection le plan de la base et celui d'une face latérale $C'c'B'b'$.

Soient (*fig.* 1)

$(ABC, A'B'C')$ la base ;

$(ABC, a'b'c')$ la troncature ;

(O, O'), (O, o') les centres de gravité de l'aire B de la base et de celle de la troncature ;

$h = A'a'$, $h' = B'b'$, $h'' = C'c'$ les longueurs des trois arêtes ;

$H = \dfrac{h + h' + h''}{3}$ la distance $O'o'$.

Je décompose le volume en trois tétraèdres par deux plans, l'un mené par les sommets (C, c'), (A, a'), (B, B'), l'autre par les sommets (A, a'), (B, b'), (C, C'). Pour simplifier, nous désignerons les tétraèdres par les projections verticales de leurs sommets. Soient x, x', x'', x_1 les distances des arêtes h, h', h'' et du centre de gravité cherché (G, G') à un plan vertical quelconque (P).

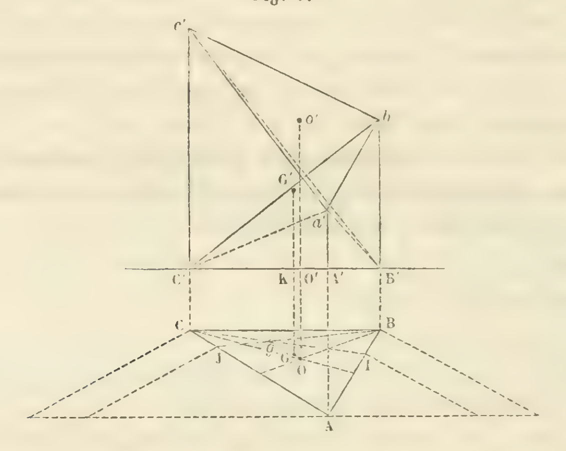
La distance du centre de gravité du volume $\frac{Bh}{3}$ du tétraèdre $C'a'A'B'$ au plan (P) est

$$\frac{2x + x' + x''}{4},$$

et son moment par rapport au même plan

$$\frac{Bh}{3}\left(\frac{2x + x' + x''}{4}\right).$$

Fig. 1.



On reconnaît facilement que les volumes $\frac{Bh'}{3}$, $\frac{Bh''}{3}$ des tétraèdres $a'c'b'B'$, $a'c'C'B'$ ont respectivement pour moments

$$\frac{B}{3}h'\left(\frac{x + 2x' + x''}{4}\right), \quad \frac{B}{3}h''\left(\frac{x + x' + 2x''}{4}\right).$$

On a ainsi

$$BHx_1 = \frac{B}{12}[h(2x + x' + x'') + h'(x + 2x' + x'') + h''(x + x' + 2x'')].$$

Supposons que l'on fasse passer (P) par le point O, on a

$$x + x' + x'' = 0$$

et par suite

$$(1)\qquad Hx_1 = \frac{hx + h'x' + h''x''}{12}.$$

Cette formule montre que (G, G') se trouve dans le plan vertical passant par O et la projection horizontale g du centre de gravité des trois arêtes.

Si l'on divise les côtés AB et AC aux points I et J de manière que l'on ait

$$\frac{AI}{IB} = \frac{h'}{h}, \quad \frac{AJ}{CJ} = \frac{h''}{h},$$

le point g sera déterminé par l'intersection des droites CI en BJ. En supposant maintenant que le plan (P) soit mené perpendiculairement à Gg, la formule (1) donne

$$Hx_1 = \frac{(h + h' + h'')}{12} \times Og = H.\frac{Og}{4},$$

d'où

$$x_1 = \frac{Og}{4}.$$

Ainsi le point G se trouve sur Og à la distance de O égale au quart de cette longueur.

Soit maintenant $z_1 = G'K$ la distance du point (G, G') au plan de la base, on a

$$BHz_1 = \frac{Bh}{3}\frac{h}{4} + \frac{Bh'}{3}\frac{(h + h' + h'')}{4} + \frac{Bh''}{3}\frac{(h + h'')}{4},$$

d'où

$$(2)\qquad z_1 = \frac{h^2 + h'^2 + h''^2 + hh' + h'h'' + hh''}{12H}.$$

Cette valeur peut se mettre sous la forme

$$z_1 = \frac{h^2 + h'^2 + h''^2 + (h + h' + h'')^2}{24H},$$

d'où

$$(3) \qquad z_1 = \frac{3}{8}\left\{H + \frac{1}{H}\left[\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \left(\frac{h'}{3}\right)^2 + \left(\frac{h''}{3}\right)^2\right]\right\},$$

expression qu'il est facile de construire géométriquement.

Si l'on pose

$$h = H + \zeta, \quad h' = H + \zeta', \quad h'' = H + \zeta'',$$

et si l'on remarque que $\zeta + \zeta' + \zeta'' = 0$, la formule (2) devient

$$z_1 = \frac{H}{2} + \frac{1}{24H}\left[(\zeta + \zeta' + \zeta'')^2 + \zeta^2 + \zeta'^2 + \zeta''^2\right].$$

On voit ainsi que le centre de gravité (G, G') se trouve à un niveau plus élevé que le milieu de la droite $O'o'$.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadron d'artillerie.

[SUITE (*).]

10. THÉORÈME. — *On donne, dans un plan* P, *m droites* $\alpha\beta\ldots\mu$ *et, dans un second plan* P', *m droites* $\alpha'\beta'\ldots\mu'$. *Si l'on forme le déterminant* δ_m *avec ces deux systèmes de m droites :*

1° *Lorsque m est plus grand que* 3, $\delta_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* R, R' *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *et par* S, S' *les aires de ces triangles,*

$$\delta_3 = \frac{SS'}{RR'} I^2_{PP'}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série t. XV, p. 251.

3° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* d, d' *les points d'intersection des droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$,

$$\delta_2 = \sin\alpha\beta \sin\alpha'\beta' \, I_{dd'} I_{PP'}.$$

Démonstration. — Par les droites du plan P menons des plans A, B,..., M ; par les droites du plan P' menons des plans A', B',..., M'. A l'aide de ces deux couples de m plans et des plans P, P', formons le déterminant ∇_{m+1} :

$$\nabla_{m+1} = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \dots & I_{AP'} \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \dots & I_{BP'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{PA'} & I_{PB'} & \dots & I_{PP'} \end{vmatrix}.$$

Multiplions par $I_{PP'}$ tous les termes des m premières lignes de ce déterminant, retranchons ensuite des 1, 2,..., $m^{ièmes}$ lignes du nouveau déterminant les produits des éléments correspondants de la dernière par $I_{AP'}$, $I_{BP'}$,..., $I_{MP'}$. Les termes de la première ligne sont

$$I_{AA'} I_{PP'} - I_{PA'} I_{AP'} = -\frac{1}{\pi^2} \sin PA \sin P'A' I_{\alpha\alpha'},$$

$$I_{AB'} I_{PP'} - I_{PB'} I_{AP'} = -\frac{1}{\pi^2} \sin PA \sin P'B' I_{\alpha\beta'},$$

. . . .

$$I_{AM'} I_{PP'} - I_{PM'} I_{AP'} = -\frac{1}{\pi^2} \sin PA \sin P'M' I_{\alpha\mu'},$$

$$I_{AP'} I_{PP'} - I_{PP'} I_{AP'} = 0,$$

et l'on a des résultats analogues pour les autres lignes.

Tous les termes de la dernière colonne étant nuls, sauf le terme $I_{PP'}$, nous avons

$$(-\pi^2)^m \nabla_{m+1} I_{PP'}^m = I_{PP'} \delta_m UU',$$

en posant

$$U = \sin PA \sin PB \dots \sin PM, \quad U' = \sin P'A' \sin P'B' \dots \sin P'M',$$

d'où nous déduisons

$$\delta_m = (-\pi^2)^m \frac{\nabla_{m+1} I_{PP'}^{m-1}}{UU'}.$$

1° Pour $m > 3$,

$$\nabla_{m+1} = 0;$$

2° Pour $m = 3$,

$$\delta_3 = -\pi^6 \frac{\nabla_4 I_{PP'}^2}{UU'},$$

$$U = \sin PA \sin PB \sin PC, \quad U' = \sin P'A' \sin P'B' \sin P'C'.$$

Or

$$\nabla_4 = -\frac{1}{\pi^6} \frac{(3V)^3}{2\,ABCP} \frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'P'},$$

en désignant par V, V′ les volumes de tétraèdres dont les faces sont formées par les plans ABCP, A′B′C′P′, et par ces mêmes lettres les aires de ces faces. On voit aisément que

$$\frac{(3V)^3}{2\,ABCP} = \frac{S}{R} \sin PA \sin PB \sin PC,$$

$$\frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'P'} = \frac{S'}{R'} \sin P'A' \sin P'B' \sin P'C',$$

R et R′ étant les rayons des cercles circonscrits aux triangles $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et S, S′ les aires de ces triangles. On obtient donc la relation 2°.

3° Lorsque $m = 2$,

$$\delta_2 = \pi^4 \frac{\nabla_3 I_{PP'}}{UU'}, \quad U = \sin PA \sin PB, \quad U' = \sin P'A' \sin P'B'.$$

Or

$$\nabla_3 = \frac{1}{\pi^4} \sin PAB \sin P'A'B' I_{dd'},$$

d, d' étant les points d'insersection des plans PAB,

P'A'B', ou des droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$; d'autre part,

$$\sin PAB = \sin PA \sin PB \sin\alpha\beta,$$
$$\sin P'A'B' = \sin P'A' \sin P'B' \sin\alpha'\beta',$$

d'où résulte la relation 3°.

Remarque. — Si m et n sont les pôles des plans M, N, on a

$$I_{mn} = -\pi^2 \frac{I_{MN}}{(o, M)(o, N)};$$

d'où il suit que si l'on a entre les indices des points a, b, c,..., m, n une relation de la forme

$$I_{ab} I_{bc} \ldots I_{mn} = I_{am} I_{nc} \ldots I_{bb},$$

c'est-à-dire telle que ces points entrent le même nombre de fois dans les deux produits, on aura, entre les plans polaires A, B, C,..., M, N de ces points, la relation

$$I_{AB} I_{BC} \ldots I_{MN} = I_{AM} I_{NC} \ldots I_{BB}.$$

Cette remarque donnera une solution intuitive de plusieurs de nos relations.

11. Si dans la relation $\Delta_2 = ab . a'b' I_{\gamma\gamma'}$ on suppose que les points b, b' coïncident avec le centre o de la surface S, puisque $I_{ab'} = I_{ba'} = I_{bb'} = -1$, on trouve

$$I_{aa'} = -1 - oa . oa' I_{\gamma\gamma'}.$$

Lorsque l'un des points a ou a' est à l'infini sur γ ou γ',

$$I_{\gamma\gamma'} = -\frac{I_{aa'}}{oa . oa'}.$$

12. Si dans la relation $\delta_2 = \sin\alpha\beta \sin\alpha'\beta' I_{pp'} I_{DD'}$ on suppose que les droites β, β' passent par le centre o,

$$(o, \alpha) = op \sin\alpha\beta, \qquad (o, \alpha') = op' \sin\alpha'\beta'.$$

d'où

$$I_{\alpha\alpha'} - \frac{I_{\alpha\beta'} I_{\beta\alpha'}}{I_{\beta\beta'}} = (o, \alpha)(o, \alpha') \frac{I_{pp'}}{op.op'} \frac{I_{DD'}}{I_{\beta\beta'}}.$$

Lorsque les points p, p' s'éloignent à l'infini sur les droites α, α', les droites β, β' deviennent les diamètres α_0, α'_0 respectivement parallèles aux droites α, α', et l'on a

$$I_{\alpha\beta'} = I_{\beta\alpha'} = I_{\beta\beta'} = I_{\alpha_0\alpha'_0}, \quad \frac{I_{pp'}}{op.op'} = - I_{\alpha_0\alpha'_0},$$

d'où résulte :

Deux droites α, α' étant données, si α_0, α'_0 sont les diamètres de la surface S *parallèles à ces droites,* D *et* D' *les plans diamétraux menés par α et α',*

$$I_{\alpha\alpha'} = I_{\alpha_0\alpha'_0} - (o, \alpha)(o, \alpha') I_{DD'}.$$

Il suit de là que, si les droites α, α' s'éloignent à l'infini dans les plans D, D',

$$I_{DD'} = - \frac{I_{\alpha\alpha'}}{(o, \alpha)(o, \alpha')}.$$

13. Si, dans la relation $\nabla_2 = - \frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\nu\nu'}$, on suppose que les plans B, B' passent par le centre o de la surface S,

$$(o, A) = (o, \nu) \sin AB, \quad (o, A') = (o, \nu') \sin A'B',$$

de sorte que

$$I_{AA'} - \frac{I_{AB'} I_{BA'}}{I_{BB'}} = - \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2 I_{BB'}} \frac{I_{\nu\nu'}}{(o, \nu)(o, \nu')}.$$

Lorsque les droites ν, ν' s'éloignent à l'infini dans les plans A, A', les plans B, B' deviennent les plans diamétraux A_0, A'_0 parallèles aux plans A, A', et l'on a

$$I_{AB'} = I_{BA'} = I_{BB'_0} = I_{A_0 A'_0}, \quad \frac{I_{\nu\nu'}}{(o, \nu)(o, \nu')} = - I_{A_0 A'_0}.$$

Par conséquent :

Deux plans A, A′ *étant donnés, si l'on désigne par* A_0, A'_0 *les plans diamétraux parallèles à ces plans,*

$$I_{AA'} = I_{A_0 A'_0} + \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2}.$$

Si, dans cette relation, l'un des plans A, A′ s'éloigne à l'infini,

$$\frac{I_{AA'}}{(o, A)(o, A')} = \frac{1}{\pi^2}.$$

14. Si l'on développe le déterminant Δ_5 formé à l'aide des points *abcde*, *a′b′c′d′e′*, par rapport aux éléments de sa dernière colonne, on trouve, après avoir ôté le facteur *a′b′c′d′*,

$$abcd\,I_{ee'} = bcde\,I_{ae'} + cdac\,I_{be'} + dabe\,I_{ce'} + abce\,I_{de'},$$

avec la condition

$$abcd = bcde + cdae + dabe + abce,$$

à laquelle se réduit la relation précédente lorsque le point *e′* coïncide avec le centre de la surface S. Si l'on remplace les volumes par leurs valeurs, en désignant par A, B, C, D les faces du tétraèdre *abcd*, on aura ce théorème :

Étant donnés un tétraèdre abcd et la surface S, *l'indice du système des points e, e′ est donné par la relation*

$$(1)\quad I_{ee'} = \frac{(e, A)}{(a, A)} I_{ae'} + \frac{(e, B)}{(b, B)} I_{be'} + \frac{(e, C)}{(c, C)} I_{ce'} + \frac{(e, D)}{(d, D)} I_{de'}.$$

Le déterminant ∇_5 conduit, de même, au suivant :

Étant donnés un tétraèdre abcd et la surface S, *l'indice du système des plans* E, E′ *est donné par la*

relation

$$(2)\ I_{EE'} = \frac{(a, E)}{(a, A)} I_{AE'} + \frac{(b, E)}{(b, B)} I_{BE'} + \frac{(c, E)}{(c, C)} I_{CE'} + \frac{(d, E)}{(d, D)} I_{DE'}.$$

15. A l'aide d'un second tétraèdre $a'b'c'd'$, on trouverait de même

$$I_{ee'} = \frac{(e', A')}{(a', A')} I_{ea'} + \frac{(e', B')}{(b', B')} I_{eb'} + \frac{(e', C')}{(c', C')} I_{ec'} + \frac{(e', D')}{(d', D')} I_{ed'}.$$

Remplaçons dans cette relation le point e successivement par a, b, c, d, et substituons dans la relation (1) les valeurs que nous obtenons pour $I_{ae'}$, $I_{be'}$, $I_{ce'}$, $I_{de'}$, nous avons ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' et la surface S, *l'indice du système des points e, e' par rapport à cette surface est exprimé par la relation*

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)\,(e', A')}{(a, A)\,(a', A')} I_{aa'} \qquad (16 \text{ termes});$$

et, comme cas particuliers :

Étant donnés deux triangles abc, a'b'c' ou $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *et la surface* S, *si l'on prend un point e dans le plan abc, un point e' dans le plan a'b'c',*

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, \alpha)\,(e', \alpha')}{(a, \alpha)\,(a', \alpha')} I_{aa'} \qquad (9 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux segments ab, a'b' et la surface S, *si l'on prend sur le premier un point e, sur le second un point e',*

$$I_{ee'} = \sum \frac{eb\,.\,e'b'}{ab\,.\,a'b'} I_{aa'} \qquad (4 \text{ termes}).$$

16. Si dans cette relation les points e, e' sont à l'infini et que ε, ε' désignent les diamètres de S, parallèles aux droites ab, $a'b'$, on obtient, après avoir divisé par oe,

oe' les deux membres de l'égalité, et en ayant égard à la relation n° 11,

$$- ab.a'b' I_{\varepsilon\varepsilon'} = I_{aa'} + I_{bb'} - I_{ab'} - I_{ba'}.$$

D'où résulte, lorsque les points a', b' coïncident avec a et b :

Deux points a et b étant pris dans l'espace, si l'on désigne par ε *le diamètre de la surface* S *parallèle à* ab,

$$2 I_{ab} = I_a + I_b + ab^2 I_\varepsilon.$$

Si ε_0 est le demi-diamètre parallèle à ab, on sait d'ailleurs que $I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}$.

17. Nous avons la relation

$$\begin{vmatrix} I_{ee'} & I_{ef'} \\ I_{fe'} & I_{ff'} \end{vmatrix} = ef.e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'},$$

e, f étant deux points de la droite ε ; e', f' deux points de la droite ε'. Remplaçons $I_{ee'}$ par la valeur (1), $I_{ef'}$, $I_{fe'}$, $I_{ff'}$ par les valeurs analogues,

$$I_{ef'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} I_{af'}, \quad I_{fe'} = \sum \frac{(f, A)}{(a, A)} I_{ae'},$$

$$I_{ff'} = \sum \frac{(f, A)}{(a, A)} I_{af'}.$$

On obtient d'abord

$$ef.e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (e, A) & (e, B) \\ (f, A) & (f, B) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_{ae'} & I_{af'} \\ I_{be'} & I_{bf'} \end{vmatrix} \frac{1}{(a, A)(b, B)};$$

or, on voit aisément que

$$\begin{vmatrix} (e, A) & (e, B) \\ (f, A) & (f, B) \end{vmatrix} = ef \,|\, \varepsilon, \nu \,|\, \sin AB,$$

$|\, \varepsilon, \nu \,|$ désignant le produit de la plus courte distance de

la droite ε à l'intersection ν des plans A, B, multipliée par sin $\varepsilon\nu$; d'ailleurs le second déterminant a pour valeur $ab\,.\,e'f'\mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'}$, donc

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\,\varepsilon,\ \nu\,|\, ab \,\sin \mathrm{AB}}{(a,\ \mathrm{A})(b,\ \mathrm{B})}\, \mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'};$$

mais on a aussi

$$(a,\ \mathrm{A})(b,\ \mathrm{B}) = \begin{vmatrix} (a,\ \mathrm{A}) & (a,\ \mathrm{B}) \\ (b,\ \mathrm{A}) & (b,\ \mathrm{B}) \end{vmatrix} = ab\,|\,\gamma,\ \nu\,|\sin \mathrm{AB},$$

et, par conséquent, *étant donné le tétraèdre abcd, l'indice du système des droites* $\varepsilon\varepsilon'$ *est donné par la relation*

$$(3) \qquad \mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\,\varepsilon,\ \nu\,|}{|\,\gamma,\ \nu\,|}\, \mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'} \qquad (6 \text{ termes}).$$

A l'aide du tétraèdre $a'b'c'd'$, on aurait

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\,\varepsilon',\ \nu'\,|}{|\,\gamma',\ \nu'\,|}\, \mathrm{I}_{\varepsilon\gamma'}.$$

Si dans cette expression on remplace ε successivement par toutes les arêtes α, β, γ,... du tétraèdre *abcd* et que l'on remplace dans la relation (3) $\mathrm{I}_{\alpha\varepsilon'}$, $\mathrm{I}_{\beta\varepsilon'}$, $\mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'}$, ... par les valeurs ainsi obtenues, on voit que :

18. *Étant donnés deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' et la surface* S, *l'indice du système des droites* ε, ε' *est donné par la relation*

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\,\varepsilon,\ \nu\,|\,|\,\varepsilon',\ \nu'\,|}{|\,\gamma,\ \nu\,|\,|\,\gamma',\ \nu'\,|}\, \mathrm{I}_{\gamma\gamma'} \qquad (36 \text{ termes}).$$

De ces deux relations nous déduisons ces cas particuliers :

Si, par le sommet du trièdre $\lambda\mu\nu$ *ou* ABC, *on mène une droite* ε, *on a,* ε' *étant une droite arbitraire,*

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{\sin(\varepsilon,\ \mathrm{A})}{\sin(\lambda,\ \mathrm{A})}\, \mathrm{I}_{\lambda\varepsilon'} = \sum \frac{\sin \varepsilon\mu\nu}{\sin \lambda\mu\nu}\, \mathrm{I}_{\lambda\varepsilon'} \quad (3 \text{ termes}).$$

Deux trièdres $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ étant donnés, si, par leurs sommets, on mène les droites ε, ε',

$$\left.\begin{aligned} I_{\varepsilon\varepsilon'} &= \sum \frac{\sin\varepsilon A \sin\varepsilon' A'}{\sin\lambda A \sin\lambda' A'} I_{\lambda\lambda'} \\ &= \sum \frac{\sin\varepsilon\mu\nu \sin\varepsilon'\mu'\nu'}{\sin\lambda\mu\nu \sin\lambda'\mu'\nu'} I_{\lambda\lambda'} \end{aligned}\right\} \quad (9 \text{ termes}).$$

Si, par le sommet de l'angle $\lambda\mu$ et dans son plan, on mène une droite ε, on a, ε' étant une droite arbitraire,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{\sin\varepsilon\mu}{\sin\lambda\mu} I_{\lambda\varepsilon'} \qquad (2 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux angles $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$, si l'on mène par leurs sommets et dans leurs plans les droites ε, ε',

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{\sin\varepsilon\mu \sin\varepsilon'\mu'}{\sin\lambda\mu \sin\lambda'\mu'} I_{\lambda\lambda'} \qquad (4 \text{ termes}).$$

Si, dans le plan du triangle abc, on mène une droite ε, on a, ε' étant une droite quelconque,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{(a, \varepsilon)}{(a, \alpha)} I_{\alpha\varepsilon'} \qquad (3 \text{ termes}).$$

Étant donnés deux triangles abc, a'b'c', si, dans les plans de ces triangles, on mène les droites ε, ε',

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{(a, \varepsilon)(a', \varepsilon')}{(a, \alpha)(a', \alpha')} I_{\alpha\alpha'} \qquad (9 \text{ termes}).$$

19. A l'aide de la relation (2), on établira de la même manière ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' et la surface S, *l'indice du système des plans* E, E' *est donné par la relation*

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} I_{AA'} \qquad (16 \text{ termes});$$

et, comme cas particuliers :

Étant donnés deux angles trièdres ABC, A′B′C′ *ou* $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ *et la surface* S, *si l'on mène par le sommet du premier un plan* E, *par le sommet du second un plan* E′,

$$\left.\begin{aligned} I_{EE'} &= \sum \frac{\sin(\lambda, E)\sin(\lambda', E')}{\sin(\lambda, A)\sin(\lambda', A')} I_{AA'} \\ &= \sum \frac{\sin EBC \sin E'B'C'}{\sin ABC \sin A'B'C'} I_{AA'} \end{aligned}\right\} \text{(9 termes).}$$

Étant donnés deux angles dièdres AB, A′B′ *et la surface* S, *si l'on mène par l'arête du premier un plan* E, *par l'arête du second un plan* E′,

$$I_{EE'} = \sum \frac{\sin EB \sin E'B'}{\sin AB \sin A'B'} I_{AA'} \quad \text{(4 termes).}$$

Si le point p est commun aux deux plans E, E′, cette relation développée peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\sin AB \sin A'B'}{\sin EA \sin E'A'} \frac{I_{EE'}}{(p, B)(p, B')} \\ &\quad = \frac{I_{AA'}}{(p, A)(p, A')} + \frac{I_{BB'}}{(p, B)(p, B')} \\ &\quad\quad - \frac{I_{AB'}}{(p, A)(p, B')} - \frac{I_{BA'}}{(p, B)(p, A')}. \end{aligned}$$

Dans le cas où les plans A′, B′ coïncident avec les plans B et A :

20. *Deux plans* A, B *étant donnés, si, par leur intersection et un point* p, *on mène un plan* E,

$$\frac{2 I_{AB}}{(p, A)(p, B)} = \frac{I_A}{(p, A)^2} + \frac{I_B}{(p, B)^2} - \frac{\sin^2 AB}{\sin EA \sin EB} \frac{I_E}{(p, A)(p, B)}.$$

21. Ces résultats et d'autres peuvent se mettre sous forme de déterminants, comme il suit. Si, dans la relation (1) du n° 14, on désigne par E′ le plan polaire du

point e, on trouve que cette relation peut s'écrire ainsi :

$$(3)\quad -(e', E') = \pi^2\left[\frac{I_{ae'}I_{AE'}}{(a, A)} + \frac{I_{be'}I_{BE'}}{(b, B)} + \frac{I_{ce'}I_{CE'}}{(c, C)} + \frac{I_{de'}I_{DE'}}{(d, D)}\right];$$

elle donne la distance d'un point e' à un plan E'. Ce lemme posé, soit

$$X_r = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & I_{AC'} & I_{AD'} & (e, A) & (f, A) & \ldots & (m, A) \\ I_{BA'} & I_{BB'} & I_{BC'} & I_{BD'} & (e, B) & (f, B) & \ldots & (m, B) \\ I_{CA'} & I_{CB'} & I_{CC'} & I_{CD'} & (e, C) & (f, C) & \ldots & (m, C) \\ I_{DA'} & I_{DB'} & I_{DC'} & I_{DD'} & (e, D) & (f, D) & \ldots & (m, D) \\ (e', A') & (e', B') & (e', C') & (e', D') & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (f', A') & (f', B') & (f', C') & (f', D') & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots & . \\ (m', A') & (m', B') & (m', C') & (m', D') & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

La lettre r désignant le nombre des points $e, f, \ldots, m, e', f', \ldots, m'$; (e, A), (e, B), (e, C), (e, D) sont les coordonnées du point e par rapport au tétraèdre $abcd$ ou ABCD; (e', A'), (e', B'), (e', C'), (e', D') sont les coordonnées du point e' par rapport au tétraèdre $a'b'c'd'$ ou A'B'C'D'; de même pour les autres points.

Si nous désignons par Δ_r le déterminant $\begin{vmatrix} e & f & \ldots & m \\ e' & f' & \ldots & m' \end{vmatrix}$, nous aurons la relation

$$X_r = \pi^{2r}\nabla_4\Delta_r,$$

∇_4 ayant la valeur indiquée (n° 8). A cet effet, soit h' le $n^{ième}$ point du groupe $e'f'\ldots m'$. Multiplions par $\pi^2\dfrac{I_{ah'}}{(a, A)}$ les termes de la première ligne du déterminant X_r, par $\pi^2\dfrac{I_{bh'}}{(b, B)}$ les termes de la deuxième ligne, par $\pi^2\dfrac{I_{ch'}}{(c, C)}$ ceux de la troisième, et enfin par $\pi^2\dfrac{I_{dh'}}{(d, D)}$ ceux de la quatrième. Aux éléments de la $n + 4^{ième}$ ligne

de X_r ajoutons ceux des quatre premières, ainsi multipliées; si l'on a égard aux relations (1) et (3), on verra que cette $n+4^{ième}$ ligne sera

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \pi^2 I_{eh'} \quad \pi^2 I_{fh'} \quad \ldots \quad \pi^2 I_{mh'},$$

c'est-à-dire qu'elle est formée de quatre zéros et de la $n^{ième}$ colonne de Δ_r, dont chaque terme est multiplié par π^2. La relation à démontrer résulte de cette nouvelle forme de X_r.

Si l'on a égard aux valeurs que prend Δ_r (n° 2) pour $r=1, 2, 3, \ldots$, on aura ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' *et la surface* S, *si l'on forme le déterminant* X_r :

1° *Pour* $r=1$,

$$X_1 = \pi^2 \nabla_4 I_{ee'};$$

2° *Pour* $r=2$, *en désignant par* $\varepsilon, \varepsilon'$ *les droites* $ef, e'f'$,

$$X_2 = \pi^4 \nabla_4\, ef . e'f'\, I_{\varepsilon\varepsilon'};$$

3° *Pour* $r=3$, *en désignant par* H, H' *les plans des triangles* efg, $e'f'g'$,

$$X_3 = 4\pi^6 \nabla_4\, efg . e'f'g'\, I_{HH'};$$

4° *Pour* $r=4$,

$$X_4 = -36\pi^6 \nabla_4\, efgh . e'f'g'h'.$$

22. Posons maintenant

$$x_r = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} & I_{ad'} & (a, E) & (a, F) & \ldots & (a, M) \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} & (b, E) & (b, F) & \ldots & (b, M) \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} & (c, E) & (c, F) & \ldots & (c, M) \\ I_{da'} & I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} & (d, E) & (d, F) & \ldots & (d, M) \\ (a', E') & (b', E') & (c', E') & (d', E') & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ (a', F') & (b', F') & (c', F') & (d', F') & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & . & . & \ldots & 0 \\ (a', M') & (b', M') & (c', M') & (d', M') & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

$$\nabla_r = \begin{vmatrix} I_{EE'} & I_{EF'} & \dots & I_{EM'} \\ I_{FE'} & I_{FF'} & \dots & I_{FM'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{ME'} & I_{MF'} & \dots & I_{MM'} \end{vmatrix}.$$

La lettre r désigne le nombre des plans EF...M, E′F′...M′ qui figurent dans le déterminant ∇_r; les distances (a, E), (b, E), (c, E), (d, E) sont les coordonnées du plan E par rapport au tétraèdre $abcd$; les distances (a', E'), (b', E'), (c', E'), (d', E') sont les coordonnées du plan E′ par rapport au tétraèdre $a'b'c'd'$; de même pour les autres plans.

Entre ces deux déterminants existe la relation

$$x_r = \pi^{2r} \Delta_4 \nabla_r,$$

Δ_4 ayant la valeur indiquée (2). Cette relation se démontre d'une manière analogue à la précédente, en ayant égard aux égalités (2) et (3).

Si l'on a égard aux valeurs de ∇_r pour $r = 1, 2, 3, 4$ (8), on aura ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres abcd, a′b′c′d′ et la surface S, *si l'on forme le déterminant* x_r :

1° *Pour* $r = 1$,

$$x_1 = \pi^2 \Delta_4 I_{EE'};$$

2° *Pour* $r = 2$, *si l'on désigne par* φ *et* φ' *les droites déterminées par les plans* EF, E′F′,

$$x_2 = -\pi^2 \Delta_4 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'};$$

3° *Pour* $r = 3$, *si l'on désigne par* h, h' *les points déterminés par les plans* EFG, E′F′G′, *et par* sin EFG, sin E′F′G′ *les sinus des angles solides déterminés par les normales à ces plans :*

$$x_3 = \pi^2 \Delta_4 \sin EFG \sin E'F'G' I_{hh'};$$

4° *Pour* $r = 4$, *si l'on désigne par* U *et* U′ *les volumes des tétraèdres déterminés par les plans* EFGH, E′F′G′H′ *et par les mêmes lettres les aires de leurs faces :*

$$x_4 = -\pi^2 \Delta_4 \frac{(3U)^3}{2\,EFGH} \frac{(3U')^3}{2\,E'F'G'H'}.$$

Remarques. — Lorsque les points e, e' sont conjugués à la surface S, $X_1 = 0$, de sorte que, si e' est un point fixe, l'équation représente le plan polaire de ce point e', et si le point e' coïncide avec e, l'équation correspondante est une équation *par points* de la surface S.

Lorsque les droites ε, ε' sont conjuguées à la surface S, $X_2 = 0$, de sorte que, si la droite ε' est fixe et déterminée par ses deux points e', f', l'équation $X_2 = 0$ représentera le complexe formé par les droites qui rencontrent la polaire de ε'. Si les points e', f' coïncident avec les points e, f, l'équation correspondante représentera un complexe de droites toutes tangentes à la surface S. On peut dire que c'est une équation *par droites* de cette surface.

Lorsque les plans H, H′ sont conjugués à la surface S, $X_3 = 0$, de sorte que, si le plan H′ est fixe et déterminé par ses trois points e', f', g', l'équation $X_3 = 0$ représentera tous les plans qui passent par le pôle du plan H. Si les points e', f', g' coïncident avec les points e, f, g, l'équation correspondante représentera tous les plans qui touchent la surface S. On peut dire que c'est une équation *par plans* de cette surface.

Remarquons que l'équation de notre surface S se trouve rapportée aux deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$, ou à un système de huit plans. Lorsque les tétraèdres coïncideront, on retrouvera les formes connues.

Les diverses valeurs du déterminant x_r (22) donnent lieu à des remarques analogues.

Indices par rapport à une sphère S.

23. Indice du système de deux points a, a'.

D'après (11) nous avons, R étant le rayon de la sphère S :

$$I_{aa'} = -1 - oa \, . \, oa' \, I_{\gamma\gamma'} ;$$

or

$$I_{\gamma\gamma'} = -\frac{\cos aoa'}{R^2} ;$$

par conséquent

$$I_{aa'} = -1 + \frac{oa \, . \, oa' \cos aoa'}{R^2} .$$

Concevons la sphère qui a pour diamètre le segment aa' et désignons par $p_{aa'}$ la puissance du centre de la sphère S par rapport à la sphère aa' :

$$I_{aa'} = -1 + \frac{p_{aa'}}{R^2} .$$

24. Indice du système de deux droites α, α'.

Nous avons (12), D, D' représentant les plans diamétraux menés par les droites α, α' :

$$I_{\alpha\alpha'} = I_{\alpha_0\alpha'_0} - (o, \alpha)(o, \alpha') \, I_{DD'} .$$

Or, dans la sphère,

$$I_{\alpha_0\alpha'_0} = -\frac{\cos \alpha\alpha'}{R^2} , \quad I_{DD'} = -\frac{\cos DD'}{R^4} ;$$

par conséquent

$$I_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos \alpha\alpha'}{R^2} + \frac{(o, \alpha)(o, \alpha') \cos DD'}{R^4} ;$$

d'après (5) on a aussi, $|\nu', \alpha'|$ indiquant la plus courte distance de la polaire ν' de la droite α à la droite α' multipliée par $\sin \nu'\alpha'$:

$$I_{\alpha\alpha'} = \frac{(o, \alpha) \, |\nu', \alpha'|}{R^4} .$$

25. Indice du système de deux plans A, A′.

Nous avons (13) en général

$$I_{AA'} = I_{A_0A'_0} + \frac{(o, A)(o, A')}{\pi^2};$$

or, dans la sphère $I_{A_0A'_0} = -\frac{\cos AA'}{R^4}$, en désignant par AA′ l'angle formé par les normales aux plans A et A′, donc

$$I_{AA'} = \frac{(o, A)(o, A') - R^2 \cos AA'}{R^6}.$$

Lorsque les plans A, A′ coupent la sphère, on peut donner à cette expression une autre forme. Désignons par r, r' les rayons des petits cercles déterminés par les plans A, A′; par θ l'angle sous lequel se coupent ces petits cercles. Abaissons du centre o des perpendiculaires sur les plans A, A′, et soient a, a' les points où elles percent la sphère; si le point m est un des points d'intersection des deux petits cercles, le triangle sphérique ama' donne

$$\cos aa' = \cos ma \cos ma' + \sin ma \sin ma' \cos ama';$$

or

$$(o, A) = R \cos ma, \quad (o, A') = R \cos ma',$$
$$r = R \sin ma, \quad r' = R \sin ma', \quad \cos ama' = -\cos\theta,$$

de sorte que la relation précédente devient

$$R^2 \cos aa' = (o, A)(o, A') - rr' \cos\theta;$$

et, si l'on remarque que l'arc aa' sert de mesure à l'angle des plans A, A′, on trouvera

$$I_{AA'} = \frac{rr' \cos\theta}{R^6}.$$

On doit remarquer que l'angle θ est nul lorsque les petits cercles se touchent extérieurement et qu'il est de

180 degrés lorsqu'ils se touchent intérieurement. Lorsque les plans A, A' sont conjugués, $I_{AA'} = 0$, par conséquent $\theta = 90^\circ$.

Relations entre deux groupes de m points.

Notations. — 26. Étant pris dans l'espace deux groupes de m points $abc\ldots m$, $a'b'c'\ldots m'$, posons

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & \ldots & I_{am'} & 1 \\ I_{ba'} & I_{bb'} & \ldots & I_{bm'} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{ma'} & I_{mb'} & \ldots & I_{mm'} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par d_{rs} le carré de la distance rs divisé par le carré du demi-diamètre de S parallèle à la droite rs, nous poserons

$$a_m = \begin{vmatrix} d_{aa'} & d_{ab'} & \ldots & d_{am'} \\ d_{ba'} & d_{bb'} & \ldots & d_{bm'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{ma'} & d_{mb'} & \ldots & d_{mm'} \end{vmatrix},$$

$$a'_m = \begin{vmatrix} d_{aa'} & d_{ab'} & \ldots & d_{am'} & 1 \\ d_{ba'} & d_{bb'} & \ldots & d_{bm'} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{ma'} & d_{mb'} & \ldots & d_{mm'} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on désigne par rs le carré de la distance rs, posons

$$b_m = \begin{vmatrix} aa' & ab' & \ldots & am' \\ ba' & bb' & \ldots & bm' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ma' & mb' & \ldots & mm' \end{vmatrix},$$

$$b'_m = \begin{vmatrix} aa' & ab' & \dots & am' & 1 \\ ba' & bb' & \dots & bm' & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ ma' & mb' & \dots & mm' & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Déterminant Δ'_m.

27. *Étant pris dans l'espace deux groupes de* m *points* $abc\dots m$, $a'b'c'\dots m'$:

1° *Le déterminant* $\Delta'_m = 0$ *pour* m *plus grand que* 4.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$\Delta'_4 = -\frac{36\,abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* D_0, D'_0 *les plans diamétraux parallèles aux plans* D, D' *des triangles* abc, $a'b'c'$,

$$\Delta'_3 = 4\,abc.a'b'c'\,I_{D_0D'_0}.$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* γ_0, γ'_0 *les diamètres parallèles aux droites* γ, γ' *qui joignent les points* ab, $a'b'$

$$\Delta'_2 = ab.a'b'\,I_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Démonstration. — Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & \dots & m & o \\ a' & b' & c' & \dots & m' & o \end{vmatrix}$$

formé à l'aide des deux systèmes de $m+1$ points a, b, $c\dots m$, o; $a'b'c'\dots m'$, o; le dernier o étant le centre de la surface S. On a

$$I_{ao} = I_{bo} = \dots = I_{oa'} = I_{ob'} = \dots = I_{oo} = -1,$$

par conséquent

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} a & b & \dots & m & o \\ a' & b' & \dots & m' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \dots & m \\ a' & b' & \dots & m' \end{vmatrix}.$$

1° Lorsque m est plus grand que 4, ces deux déterminants sont nuls.

2° Lorsque $m = 4$, le premier est nul, de sorte que

$$\Delta'_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = \Delta_4.$$

3° Lorsque $m = 3$,

$$\Delta'_3 = \begin{vmatrix} a & b & c & o \\ a' & b' & c' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix};$$

or

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ a' & b' & c' & o \end{vmatrix} = -\frac{36\, oabc\,.\,oa'b'c'}{\pi^2}$$

$$= -\frac{4\, abc.a'b'c'}{\pi^2}(o, \mathrm{D})(o, \mathrm{D}'),$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & a' & c' \end{vmatrix} = 4abc.a'b'c'\,\mathrm{I}_{\mathrm{DD}'}$$

et (13)

$$\Delta'_3 = 4abc.a'b'c'\left[\mathrm{I}_{\mathrm{DD}'} - \frac{(o,\mathrm{D})(o,\mathrm{D}')}{\pi^2}\right] = 4abc.a'b'c'\,\mathrm{I}_{\mathrm{D}_0\mathrm{D}'_0}.$$

4° Lorsque $m = 2$,

$$\Delta'_2 = \begin{vmatrix} a & b & o \\ a' & b' & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix};$$

or, en désignant par P, P′ les plans oab, $oa'b'$

$$\begin{vmatrix} a & b & o \\ a' & b' & o \end{vmatrix} = 4oab\,.\,oa'b'\,\mathrm{I}_{\mathrm{PP}'} = ab\,.\,a'b'(o,\gamma)(o,\gamma')\,\mathrm{I}_{\mathrm{PP}'},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab\,.\,a'b'\,\mathrm{I}_{\gamma\gamma'},$$

de sorte que (12)

$$\Delta'_2 = ab.a'b'[\mathrm{I}_{\gamma\gamma'} + (o,\gamma)(o,\gamma')\,\mathrm{I}_{\mathrm{PP}'}] = ab.a'b'\,\mathrm{I}_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Déterminant a_m.

28. *Étant pris sur une surface du second degré* S *deux groupes de m points ab...m; a' b'...m':*

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $a_m = 0$.

2° *Lorsque m* = 4,

$$a_4 = -\frac{\overline{24}^2\, abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° *Lorsque m* = 3,

$$a_3 = -32\, abc.a'b'c'\,\mathrm{I}_{\mathrm{DD}'}.$$

4° *Lorsque m* = 2,

$$a_2 = 4ab.a'b'\,\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}.$$

Démonstration. — On a généralement (16)

$$2\,\mathrm{I}_{rs} = \mathrm{I}_r + \mathrm{I}_s - d_{rs},$$

d_{rs} indiquant le carré du rapport de la distance des points r et s au demi-diamètre de la surface S parallèle à la droite rs.

Si les points r et s sont sur la surface $2\,\mathrm{I}_{rs} = -d_{rs}$, de sorte que

$$a_m = (-2)^m \Delta_m,$$

les valeurs obtenues pour Δ_m donnent la démonstration du théorème.

Déterminant a'_m.

29. *Étant pris dans l'espace deux groupes de m points quelconques ab...m, a'b'...m':*

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $a'_m = 0$.

2° *Lorsque m* = 4,

$$a'_4 = -\frac{288\, abcd.a'b'c'd'}{\pi^2}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *si* D_0, D'_0 *représentent les plans diamétraux de la surface* S *parallèles aux plans* abc, $a'b'c'$,

$$a'_3 = 16\,abc.a'b'c'\,I_{D_0D'_0}.$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *si* γ_0, γ'_0 *représentent les diamètres de la surface* S *parallèles aux droites* ab, $a'b'$,

$$a'_2 = -2\,ab.a'b'\,I_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Démonstration. — Multiplions par -2 les termes du déterminant Δ'_m, sauf ceux de la dernière ligne et de la dernière colonne; le nouveau déterminant a pour valeur $(-2)^{m-1}\Delta'_m$. Ce déterminant ne change pas de valeur si aux éléments des $1, 2 \ldots m^{\text{ièmes}}$ lignes on ajoute le produit des éléments de la dernière respectivement par I_a, I_b, ..., I_m; et ensuite aux éléments des $1, 2 \ldots m^{\text{ièmes}}$ colonnes le produit des éléments de la dernière respectivement par $I_{a'}$, $I_{b'}$, ..., $I_{m'}$. Le déterminant ainsi formé est celui que nous avons appelé a'_m à cause de la relation générale $2I_{rs} = I_r + I_s - d_{rs}$. On a donc

$$a'_m = (-2)^{m-1}\Delta'_m.$$

Déterminant b_m.

30. Dans le cas où la surface S est une sphère de rayon R, on a

$$d_{rs} = \frac{rs}{R^2},$$

rs indiquant le carré de la distance des points r et s; on a par suite la relation $b_m = R^{2m} a_m$, d'où résulte :

Étant pris sur une sphère de rayon R *deux groupes de m points* $ab \ldots m$; $a'b' \ldots m'$:

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $b_m = 0$.

2° *Lorsque m = 4,*

$$b_4 = -(24\,\mathrm{R})^2\, abcd.a'b'c'd'.$$

3° *Lorsque m = 3, si l'on désigne par* D, D' *les plans abc, a'b'c',*

$$b_3 = 32\,abc.a'b'c'\,[\mathrm{R}^2 \cos \mathrm{DD'} - (o, \mathrm{D})(o, \mathrm{D'})].$$

Si l'on désigne par p, p' les produits a.b.c, a'.b'.c' des côtés des triangles abc, a'b'c', par θ l'angle sous lequel se coupent les cercles abc, a'b'c' de rayons r et r',

$$b_3 = -2pp' \cos\theta = -32\,abc.a'b'c'rr' \cos\theta.$$

4° *Lorsque m = 2, si l'on désigne par γ, γ' les directions ab, a'b'; par* D, D' *les plans diamétraux oab, oa'b',*

$$b_2 = 4\,ab.a'b'\,[(o,\gamma)(o,\gamma')\cos \mathrm{DD'} - \mathrm{R}^2 \cos\gamma\gamma'].$$

Ce théorème se déduit immédiatement des valeurs de a_m en y remplaçant les indices $\mathrm{I}_{\mathrm{DD'}}$, $\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}$ par leurs valeurs relatives à la sphère (24) et (25).

Déterminant b'_m.

31. Dans le cas où la surface S est une sphère, on trouve, comme ci-dessus, $b'_m = \mathrm{R}^{2(m-1)}\, a'_m$, et l'on obtient ce théorème indépendant de la sphère :

Étant pris arbitrairement dans l'espace deux groupes de m points ab...m; a'b'...m' :

1° *Lorsque m est plus grand que 4,*

$$b'_m = 0.$$

2° *Lorsque m = 4,*

$$b'_4 = 288\, abcd.a'b'c'd'.$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *si l'on désigne par* D *et* D' *les plans des triangles* abc, $a'b'c'$,

$$b'_3 = -16\, abc . a'b'c' \cos(\mathrm{DD}').$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *si l'on désigne par* γ, γ' *les droites* ab, $a'b'$,

$$b'_2 = 2\, ab . a'b' \cos(\gamma, \gamma').$$

Ce théorème se déduit du déterminant a'_m en y remplaçant les indices $\mathrm{I}_{\mathrm{D}_0\mathrm{D}'_0}$, $\mathrm{I}_{\gamma_0\gamma'_0}$ par leurs valeurs relatives à la sphère.

32. Considérons deux groupes de $m+1$ points $ab\ldots mo$; $a'b'\ldots m'o'$ et supposons les premiers $ab\ldots m$ sur une sphère ayant pour centre le point o', ceux du second groupe $a'b'\ldots m'$ sur une sphère ayant pour centre le point o. A l'aide de ces points formons le déterminant

$$\Delta_{m+1} = \begin{vmatrix} a & b & \ldots & m & o \\ a' & b' & \ldots & m' & o' \end{vmatrix},$$

les indices étant pris par rapport à la sphère o.

Les termes de la dernière ligne de ce déterminant $\mathrm{I}_{oa'}, \mathrm{I}_{ob'} \ldots \mathrm{I}_{oo'}$ sont tous égaux à -1 : par conséquent, si des termes de chaque colonne on retranche ceux de la dernière, on peut écrire

$$\Delta_{m+1} = - \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{aa'} - \mathrm{I}_{ao'} & \mathrm{I}_{ab'} - \mathrm{I}_{ao'} & \ldots & \mathrm{I}_{am'} - \mathrm{I}_{ao'} \\ \mathrm{I}_{ba'} - \mathrm{I}_{bo'} & \mathrm{I}_{bb'} - \mathrm{I}_{bo'} & \ldots & \mathrm{I}_{bm'} - \mathrm{I}_{bo'} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathrm{I}_{ma'} - \mathrm{I}_{mo'} & \mathrm{I}_{mb'} - \mathrm{I}_{mo'} & \ldots & \mathrm{I}_{mm'} - \mathrm{I}_{mo'} \end{vmatrix}.$$

Or, R étant le rayon de la sphère o,

$$2\mathrm{I}_{aa'} = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_{a'} - \frac{\overline{aa'}^2}{\mathrm{R}^2}, \quad 2\mathrm{I}_{ao'} = \mathrm{I}_a + \mathrm{I}_{o'} - \frac{\overline{ao'}^2}{\mathrm{R}^2},$$

d'où

$$2\left(\mathrm{I}_{aa'} - \mathrm{I}_{ao'}\right) = \mathrm{I}_{a'} - \mathrm{I}_{o'} + \frac{\overline{ao'}^2 - \overline{aa'}^2}{\mathrm{R}^2}.$$

Mais, par hypothèse, $\mathrm{I}_{a'} = 0$, puisque le point a' est sur la sphère o; de plus $ao' = \mathrm{R}'$, puisque le point a est sur la sphère o' de rayon R' et $\mathrm{I}_{o'} = \dfrac{\overline{oo'}^2}{\mathrm{R}^2} - 1$: donc

$$\mathrm{I}_{aa'} - \mathrm{I}_{ao'} = \frac{\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 - \overline{oo'}^2 - \overline{aa'}^2}{2\mathrm{R}^2}.$$

Or, si les sphères se coupent sous l'angle θ,

$$\overline{oo'}^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2 + 2\mathrm{R}\mathrm{R}'\cos\theta;$$

de sorte que, si k représente le produit $2\mathrm{R}\mathrm{R}'\cos\theta$,

$$\mathrm{I}_{aa'} - \mathrm{I}_{ao'} = -\frac{\overline{aa'}^2 + k}{2\mathrm{R}^2};$$

on a des expressions analogues pour les autres éléments de Δ_{m+1}, de sorte que nous avons, en supprimant l'exposant 2, conformément à notre notation,

$$\Delta_{m+1} = -\begin{vmatrix} aa' + k & ab' + k & \ldots & am' + k \\ ba' + k & bb' + k & \ldots & bm' + k \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ ma' + k & mb' + k & \ldots & mm' + k \end{vmatrix} \frac{1}{(-2\mathrm{R}^2)^m}$$

$$= \begin{vmatrix} aa' & ab' & \ldots & am' & 1 \\ ba' & bb' & \ldots & bm' & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ ma' & mb' & \ldots & mm' & 1 \\ k & k & \ldots & k & -1 \end{vmatrix} \frac{1}{(-2\mathrm{R}^2)^m}.$$

D'après nos notations, nous avons donc

$$(-2\mathrm{R}^2)^m \Delta_{m+1} = -b_m + 2\mathrm{R}\mathrm{R}'\cos\theta\, b'_m.$$

ou bien

$$b_m = 2RR' \cos\theta\, b'_m - (-2R^2)^m \Delta_{m+1}.$$

Dans cette relation nous connaissons Δ_{m+1} et b'_m; nous pouvons donc en déduire b_m et l'on a ce théorème :

Si l'on prend sur une sphère o de rayon R *m points* $a'b'\ldots m'$, *et sur une autre sphère* o' *de rayon* R' *m points* $ab\ldots m$, *et que l'on forme le déterminant* b_m:

1° *Lorsque m est plus grand que* 4,

$$b_m = 0.$$

2° *Lorsque* $m = 4$, θ *étant l'angle sous lequel se coupent les sphères*,

$$b_4 = \overline{24}^2\, RR'\, abcd.a'b'c'd' \cos\theta.$$

3° *Lorsque* $m = 3$, *en désignant par* D, D' *les plans des triangles* abc, $a'b'c'$,

$$b_3 = -32 abc.a'b'c' [RR' \cos DD' \cos\theta + (o, D)(o', D')].$$

4° *Lorsque* $m = 2$, *en désignant par* γ, γ' *les directions* ab, $a'b'$ *et par* D, D' *les plans diamétraux* oab, $o'a'b'$,

$$b_2 = 4ab.a'b' [RR' \cos\gamma\gamma' \cos\theta + (o, \gamma)(o', \gamma') \cos DD'].$$

Lorsque les sphères o, o' se touchent extérieurement, on fera $\cos\theta = +1$; si elles se touchent intérieurement, on fera $\cos\theta = -1$, et, si $R = R'$, on retombe sur le théorème (30); enfin, si les sphères se coupent orthogonalement, on fera $\cos\theta = 0$.

(*A suivre.*)

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, ANNÉE 1875

(voir t. XV, p. 88);

SOLUTION DE M. AUBERT,

Professeur de Mathématiques au lycée de Rennes.

On donne les côtés a, b, c *d'un triangle* ABC; *des sommets* A, B, C, *comme centres, on décrit trois circonférences qui se touchent deux à deux extérieurement : déterminer les rayons des deux circonférences tangentes aux trois premières.*

I. *Calcul du rayon du cercle tangent extérieurement.*

Soient :

R, R′, R″ les rayons des circonférences données, qui ont pour centres les sommets A, B, C du triangle ABC;

T, T′, T″ les points auxquels les circonférences données B, C; C, A; A, B se touchent deux à deux (*);

O le centre du cercle tangent extérieurement aux circonférences A, B, C, en des points a, b, c; et ρ le rayon de ce cercle;

M le centre de similitude *externe* des circonférences O et C.

On sait que les trois points M, b, T sont en ligne droite et que $Mb \times MT = \overline{Mc}^2$. Les trois points M, a, T′

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

appartiennent de même à une ligne droite, et l'on a aussi $Ma \times MT' = \overline{Mc}^2$. Il s'ensuit que les puissances du point M par rapport aux deux circonférences A, B sont égales entre elles ; donc le point M se trouve sur la perpendiculaire élevée au point T″ à la droite AB, puisque cette perpendiculaire est une tangente commune aux deux circonférences A, B, au point T″. Et, comme

$$\overline{MT''}^2 = Ma \times MT' = \overline{Mc}^2,$$

on a

$$MT'' = Mc.$$

Soit $x = MT'' = MC$. Les distances du point M aux centres des circonférences O et C étant proportionnelles aux rayons ρ et R″ de ces circonférences, on aura

$$\frac{x-\rho}{x+R''} = \frac{\rho}{R''};$$

d'où

$$(1) \qquad \rho = \frac{R''x}{x+2R''},$$

relation qui montre que la valeur de x entraine celle de ρ.

Cela posé, menons du sommet C une perpendiculaire CH sur le côté AB du triangle ABC, et par le point M une parallèle MN à AB, rencontrant CH en un point N. Soient $CH = h$ et $AH = d$, d'où

$$NH = MT'' = x, \quad MN = HT'' = AT'' - AH = R - d,$$

et

$$CN = CH - NH = h - x.$$

Le triangle rectangle CMN donne

$$\overline{CM}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{CN}^2, \quad \text{ou} \quad (x+R'')^2 = (R-d)^2 + (h-x)^2,$$

et, en remarquant que $d^2 + h^2 = (R + R'')^2$,

$$x = \frac{R^2 + RR'' - Rd}{R'' + h}.$$

En remplaçant x par cette valeur, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \rho = \frac{RR''(R + R'' - d)}{R^2 + RR'' - Rd + 2R''(R'' + h)}.$$

Dans le triangle ABC, on a

$$d = \frac{R^2 + RR' + RR'' - R'R''}{R + R'} \quad \text{et } h = \frac{2S}{R + R'},$$

en nommant S la surface du triangle.

La substitution de ces valeurs de d et de h dans l'équation (2) donne

$$\rho = \frac{RR'R''}{RR' + R'R'' + R''R + 2S}.$$

2. *Calcul du rayon du cercle tangent intérieurement.*

Des considérations tout à fait analogues à celles qui précèdent permettent de calculer la valeur du rayon du cercle tangent intérieurement aux trois circonférences données. Il suffit, pour cela, en s'appuyant sur les mêmes théorèmes, de substituer au centre de similitude externe le centre de similitude interne. Dès le début des calculs, on remarque qu'en changeant ρ en $-\rho$ et h en $-h$, les équations restent les mêmes ; il suffit donc de changer, dans le résultat obtenu, ρ en $-\rho$, et S en $-$S; d'où

$$\rho = \frac{RR'R''}{2S - RR' - R'R'' - R''R}.$$

Remarque. Dans la question proposée, on a donné les côtés a, b, c au lieu de R, R', R''; mais on sait que

$R = p - a$, $R' = p - b$, et $R'' = p - c$. La substitution de ces valeurs à R, R', R'' donnera les deux rayons cherchés en fonction des côtés du triangle. Pour le premier, par exemple, on aura

$$\rho = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)+2S}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} + \frac{2p}{S}$$

ou, en désignant par r', r'', r''' les rayons des trois cercles exinscrits au triangle ABC,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{S}(r' + r'' + r''' + 2p);$$

ou bien encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{S}(r' + r'' + r''') + \frac{2}{r},$$

r étant le rayon du cercle inscrit.

Note. — La même question a été résolue par MM. Chadu, Sondat, Gambey et Wisselink.

CONCOURS A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1876).

Composition mathématique (3 heures).

PREMIÈRE QUESTION (*Calcul logarithmique*).

Dans le triangle ABC, dont l'angle A est droit, le côté AB vaut $34828^m,43$, l'angle B vaut $48°35'27''$, et l'on demande de calculer : 1° le côté AC; 2° la quantité

dont il faudrait augmenter l'angle B, le côté AB restant le même, pour que le côté AC s'accrût de 20 mètres.

DEUXIÈME QUESTION.

Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

TROISIÈME QUESTION.

Deux droites AB et A'B' sont perpendiculaires à un même plan M aux points donnés A et A'. On sait que la longueur de AB est double de celle de A'B'. Par le pied A de AB on tire dans le plan M une droite AC faisant avec AA' un angle donné. Cela posé, on demande de trouver sur la droite AC un point d'où l'on verrait les longueurs AB et A'B' sous des angles égaux. Discussion sommaire de la solution.

Épure ($2^h 30^m$).

Une pyramide triangulaire SABC repose par sa base ABC sur le plan horizontal de projection. Le triangle ABC est équilatéral; son sommet A, le plus rapproché de la ligne de terre, est à une distance de 25 millimètres de cette ligne, et le côté AB fait avec ladite ligne de terre un angle de 45 degrés. Le côté du triangle équilatéral a une longueur de 90 millimètres, et les trois arêtes SA, SB, SC de la pyramide, dont S est le sommet, ont les longueurs suivantes, savoir : SA = 100 millimètres, SB = 86 millimètres, SC = 92 millimètres.

Cela posé, on demande :

1° De construire les projections de la pyramide;

2° De circonscrire une sphère à cette pyramide;

3° De mener, parallèlement à la face SAC de la pyramide, un plan tangent à la sphère.

Lavis.

Tracer deux carrés concentriques et à côtés parallèles, le côté du grand carré ayant une longueur de 14 centimètres et le côté du petit carré une longueur de 4 centimètres.

Tracer les diagonales dans l'intervalle compris entre les deux carrés. La figure ainsi construite est la projection horizontale d'un tronc de pyramide quadrangulaire; on suppose ce tronc éclairé par un rayon lumineux tombant à 45 degrés du coin gauche supérieur de la feuille.

Le corps sera représenté soit par la méthode des teintes plates superposées, soit par la méthode des teintes fondues ou dégradées.

Le trait ne sera pas passé à l'encre.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE (ANNÉE 1876).

I. *Calcul numérique de Trigonométrie rectiligne* ($1^h 30^m$).

Dans un triangle ABC, on donne

$$B = 28^\circ 48' 53'',6,$$
$$c = 12942^m,65,$$
$$a = 8747,657.$$

Calculer les angles A et C, le côté b, et la surface S.

II. *Problème d'Arithmétique avec calcul et raisonnement* (2 heures).

On donne la surface d'un cercle :

$$\pi R^2 = 0^{mc},888888.$$

On prend

$$\pi = \frac{22}{7}.$$

Les trois premiers chiffres de la surface seuls sont exacts, et, dans l'expression de R^2, on ne conserve que trois décimales.

Démontrer qu'on peut obtenir R à moins de 0,001, et vérifier cette valeur en complétant, d'abord par trois zéros, puis par trois 9, les trois chiffres nécessaires pour extraire la racine carrée.

III. *Question de Géométrie descriptive* ($1^h 30^m$).

On donne un plan $P\alpha P_1$, dont la trace horizontale αP fait un angle de 30 degrés avec la ligne de terre. Le plan est incliné de 53 degrés sur le plan vertical. On donne un point A dans ce plan, distant de $0^m,02$ du plan horizontal, et de 0,03 du plan vertical. Ce point est le centre de la base d'un cône droit, située dans la partie supérieure du plan, et dont le rayon est de $0^m,03$.

La hauteur du cône est donnée égale à $0^m,12$.

Construire les projections du cône.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

I. *Cours de Mécanique appliquée aux machines,* par J.-V. Poncelet.

Seconde partie : *Mouvement des fluides moteurs, ponts-levis.*

Publié par M. X. Kretz, ingénieur en chef des Manufactures de l'État.

Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes,

Successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. In-8°, avec fig. dans le texte; 1876. Prix : 12 fr.

II. *Alcune proprietà metriche dei complessi e delle congruenze lineari in Geometria projettiva.* — Nota del professore Enrico d'Ovidio.

Letta alla Reale Accademia dei Lincei, il 2 aprile 1876. Roma, coi tipi del Salviucci, 1876.

III. *Le Proiezioni ortogonali nella Geometria metrico-proiettiva.* Nota del professore Enrico d'Ovidio.

Stamperia Reale di Torino, di G.-B. Paravia e comp. (1876).

IV. *On the relative values of the pieces in chess.* by H.-M. Taylor, M. A., Fellow and tutor of Trinity college, Cambridge. From the *Philosophical Magazine* for March 1876.

V. *Calcul du produit de tous les sinus du premier quadrant, de degré en degré. Note sur un compas trisecteur.*

Mémoire sur les puissances de points. Étude de Géométrie plane; par M. Laisant, capitaine, chef du génie, à Tlemcen.

Association française pour l'avancement des Sciences. Congrès de Nantes, 1875.

Paris, au Secrétariat de l'Association, 76, rue de Rennes.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Bourguet. — « Je ne puis résister au plaisir de vous communiquer une jolie solution de la question 1192, qui m'a été donnée par M. *de Virac,* l'un de mes élèves.

» Supposons l'hyperbole équilatère; C le centre de l'hyperbole, O un point; A le point d'intersection de OC avec l'ellipse, et M le point d'intersection de OC avec la corde des contacts. Nous savons que la somme des carrés de deux demi-diamètres conjugués est égale à $\overline{CO}^2$. D'un autre côté, $\overline{OA}^2 = OM.OC$; donc le carré de son conjugué égale $\overline{CO}^2 - CO.OM = CO.MC$. Donc l'aire de l'ellipse est proportionnelle à $\sqrt{CM.MO}$, et le maximum a lieu pour $CM = MO = \frac{1}{2} CO$. On étend, sans difficulté, cette conclusion aux hyperboles quelconques au moyen des projections.

» La corde des contacts passe par le milieu de CO, et est parallèle à la tangente en O à l'hyperbole; donc elle enveloppe une hyperbole homothétique et concentrique à la proposée. Le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$. »

Extrait d'une lettre de M. Poujade, professeur au lycée d'Amiens. — Je vois dans le numéro de janvier des *Nouvelles Annales* un rapprochement fait par M. Lucas entre le lieu de la question 1173 et le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle semi-régulier inscrit à l'ellipse. Voulez-vous me permettre d'indiquer aussi la propriété suivante :

Il est visible que le lieu du point de rencontre des hau-

teurs dans un triangle semi-régulier circonscrit à l'ellipse est une ellipse concentrique passant par les points de rebroussement de la développée.

Ce lieu est tel que, si l'on prend la polaire d'un de ses points par rapport à l'ellipse, les normales à l'ellipse aux deux points où elle coupe cette polaire vont se couper sur l'ellipse.

Autrement dit, c'est le lieu indiqué par M. Faure (*Nouvelles Annales*, 1872, p. 47).

Puisque j'ai pris la plume, permettez-moi encore de vous signaler deux ou trois propriétés des normales qui n'ont peut-être pas encore été remarquées.

1° Pour que les normales en quatre points A, B, A', B', pris sur l'ellipse, concourent en un même point, il faut et il suffit que, si l'on construit le pôle de AB, A'B' soit symétrique, par rapport au centre, de la droite qui joint les projections de ce pôle sur les deux axes.

Cette propriété, qui conduit au théorème connu de Joachimsthal, revient aux relations

$$x'x'' = -a^2, \quad y'y'' = -b^2$$

entre les coordonnées des pôles de AB et de A'B', par rapport aux deux axes de l'ellipse.

Parmi les conséquences de cette proposition, en voici une assez simple :

Si d'un point de l'hyperbole $xy = ab$ (par rapport aux mêmes axes) on mène à l'ellipse les deux tangentes, puis les normales aux points de contact ; ensuite, du point de concours de ces deux normales, les deux autres normales qu'on peut mener à la courbe, les tangentes aux pieds de ces deux normales iront se couper sur la même hyperbole.

2° D'un point de la développée on mène les trois normales à l'ellipse, lieu du point de rencontre des tan-

gentes aux pieds des deux normales qui ne sont pas tangentes à la développée au point considéré, lieu du point de rencontre des tangentes au pied de la normale tangente à la développée au point considéré, et au pied de l'une des deux autres.

On trouve, pour le premier lieu,

$$x^2y^2 = a^2y^2 + b^2x^2,$$

et, pour le second,

$$(x^2y^2 - a^2y^2 - b^2x^2)(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) + 9a^2b^2x^2y^2 = 0.$$

3° Voici enfin une formule, qui m'a semblé curieuse, pour les coefficients angulaires des tangentes menées d'un point x', y' extérieur à une ellipse, $-\dfrac{b^2x' \pm y'\sqrt{P}}{a^2y' \mp x'\sqrt{P}}$, en posant $P = a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2$. On obtient aussi leurs longueurs, mais sous une forme moins brève.

Note. — M. Moret-Blanc nous a adressé des solutions des questions proposées en Mathématiques spéciales et élémentaires au concours général de 1875; M. Vladimir Habbé, maître de Mathématiques à l'École Alexandre, à Nicolajeff, a résolu les questions 1197, 1198; MM. Souverain et Thevenin les questions 1197, 1198, 1202; ces solutions nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de juin.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 325

(voir 1re série, t. XV, p. 229);

PAR M. H. BROCARD.

Soit une équation algébrique $\varphi(x) = q$; tous les coefficients sont supposés entiers positifs, q est entier positif; t étant un nombre entier positif, si l'on a

$$\varphi(t) < q, \quad \varphi(t+1) > q,$$

faisant $h = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)}$, $t + h$ *sera une valeur approchée de* x *comprise entre* t *et* $t + 1$; *discuter cette méthode d'approximation donnée par Cardan.*

D'après les conditions énoncées, $\varphi(x)$ représente une fonction entière algébrique, dont tous les termes sont positifs et renferment x en facteur. Cette fonction croît indéfiniment avec x, à partir de $x = 0$, valeur qui annule aussi $\varphi(x)$.

L'équation proposée $\varphi(x) = q$ résulte de l'élimination de y entre les deux équations $y = \varphi(x)$ et $y = q$. La première représente une courbe OMDN (*) partant de l'origine des coordonnées, et la seconde une droite ACDB parallèle à Ox, et déterminant sur Oy, à partir du point O, un segment égal à q.

Par hypothèse, l'abscisse du point d'intersection D de ces deux lignes est comprise entre les valeurs t et $t + 1$ de x. Soient OA′, OB′, sur l'axe OX des abscisses, les segments correspondants; M, N les points correspondants de la courbe; A, B ceux de la droite. Menons la droite MN qui coupe AB au point C. La correction à faire à la racine OA′ $= t$ est représentée par AC. Or la similitude des triangles ACM, NCB donne

$$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AM} + \mathrm{BN}};$$

et, en remplaçant AB, AM, BN, respectivement par 1, $q - \varphi(t)$ et $\varphi(t + 1) - q$, il vient évidemment

$$\mathrm{AC} = \frac{q - \varphi(t)}{\varphi(t+1) - \varphi(t)}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Ainsi la valeur de h n'est autre que celle de AC, c'est-à-dire la correction donnée par la *méthode des parties proportionnelles*, enseignée dans tous les cours, et sur laquelle, pour ce motif, nous ne pensons pas devoir insister davantage.

Question 1075

(voir 2e série, t. XI, p. 190);

PAR M. H. BROCARD.

Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A *et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à* A.

(LIONNET).

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule

$$N = \frac{A}{LA - 1,08366},$$

qui indique le nombre N des nombres premiers non supérieurs à A (*). D'après cela, l'inégalité à établir est la suivante :

$$\frac{2A}{L2A - 1,08366} < 2\left(\frac{A}{LA - 1,08366}\right).$$

Les numérateurs sont égaux, mais le premier dénominateur est plus grand que le second : la proposition est donc démontrée.

Question 1201

(voir 2e série, t. XV, p. 190);

PAR M. MAURICE LALLEMENT,
Élève en Mathématiques élémentaires au Lycée d'Amiens.

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans un cercle on mène des perpendiculaires aux côtés oppo-*

(*) *Théorie des nombres* de Legendre, 3e édition, 1830; t. II, p. 65 et suivantes.

sés. Elles rencontrent la circonférence en des points A′, B′, C′. *On prolonge les cordes* A′B′, A′C′, B′C′, *qui coupent respectivement les côtés* AB, AC, BC *du triangle donné en des point* c, b, a; *démontrer que les trois points* c, b, a *sont en ligne droite.* (H. Brocard.)

On sait que les trois droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point O; les trois points c, b, a doivent donc être en ligne droite, comme conséquence de cette propriété fondamentale des triangles homologiques :

Si deux triangles ABC, A′B′C′ *sont tels que les sommets correspondants* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′ *soient sur trois droites concourantes en un même point, les côtés opposés à ces sommets,* BC *et* B′C′, AC *et* A′C′, AB *et* A′B′, *se coupent en trois points* a, b, c *qui sont en ligne droite.*

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; B. Launoy; C. Chadu; Moret-Blanc; Sondat; Bourguet; Wisselink; Tournois; Paul Barbarin ; E. Belloc et Berthomieu, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux; Leloutre et Portail, élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Lille; Barthe et Clautrier, au lycée de Poitiers; Joseph Narino, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille; Biette, élève en Mathématiques élémentaires au lycée du Havre; Charles Richard; Thevenin, du lycée Charlemagne.

MM. Bourguet, Gambey, Chadu, Wisselink et Barbarin ont généralisé la proposition énoncée, en remplaçant les trois hauteurs du triangle par trois droites quelconques issues de ses sommets et concourantes en un point; et la circonférence circonscrite au triangle par l'une quelconque des lignes du second degré.

Cette généralisation a été, de même, indiquée par MM. Belloc, Berthomieu, Charles Richard et Thevenin.

Question 1203

(voir 2e série, t. XV, p. 191);

Par M. H. Jacob,

à Dijon.

Soient A *un ombilic d'une surface du second degré* (S), *et* p *le second point d'intersection de la normale*

en ce point avec la surface. On joint un point quelconque m de la surface (S) *aux points ρ et* A ; *par ce dernier point et perpendiculairement à la droite* A*m*, *on mène un plan qui coupe ρm en un point μ.*

Le point μ décrit un plan parallèle aux sections circulaires de la surface (S). (GENTY.)

L'équation de (S), rapportée au plan tangent en A et à la normale, peut s'écrire, en désignant par ρ le z du point ρ,

$$(1) \qquad x^2+y^2+az(z-\rho)+2byz+2cxz=0 \ (^*).$$

Soient x', y', z' les coordonnées de m. L'équation d'un plan mené par m perpendiculaire à Am est

$$(2) \qquad xx'+yy'+zz'=0.$$

Les équations de ρm sont

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z-\rho}{z'-\rho}=\frac{1}{\lambda};$$

d'où

$$x'=\lambda x,\ y'=\lambda y,\ z'-\rho=\lambda(z-\rho).$$

En substituant ces valeurs de x', y', z' dans l'équation (1), qui doit être vérifiée par x', y', z', et dans l'équation (2), on a les deux équations

$$\lambda(x^2+y^2)+z[\rho+\lambda(z-\rho)]=0,$$

$$\lambda(x^2+y^2)+a[\rho+\lambda(z-\rho)](z-\rho)$$
$$+2(by+cx)[\rho+\lambda(z-\rho)]=0,$$

entre lesquelles il faut éliminer λ.

(*) Elle s'écrirait plus simplement

$$x^2+y^2+az(z-\rho)+2cxz=0,$$

en prenant pour plan des xz le plan principal de (S), qui passe par la normale, à l'ombilic. (G.)

En remplaçant dans la seconde $\rho + \lambda(z - \rho)$ par sa valeur, tirée de la première, $\lambda(x^2 + y^2)$ disparaît, et il reste

$$z - a(z - \rho) - 2(by + cx) = 0,$$

équation qui représente un plan. D'autre part, l'équation de (S) peut s'écrire

$$(x^2 + y^2 + z^2) + z[a(z - \rho) + 2by + 2cx - z] = 0;$$

il s'ensuit que le lieu de μ est un plan parallèle à un plan cyclique.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Chadu; Bourguet; Chabanel; E. G., ancien élève du lycée de Reims; Belloc et Berthomieu, élèves au lycée de Bordeaux; Thevenin, élève au lycée Charlemagne.

Question 1204

(voir p. 191);

PAR M. BOURGUET.

« *Si une surface du second ordre a pour équation*

$$\begin{aligned}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy\\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z - 1 = 0,\end{aligned}$$

et si cette équation représente deux plans, les coefficients sont liés par les trois relations

(1) $$M\frac{B'B''}{B} + N\frac{BB''}{B'} + P\frac{BB'}{B''} + 1 = 0,$$

(2) $$\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0,$$

(3) $$MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1 = 0.$$

» *Dans ces relations, on a posé*

$$\frac{1}{M} = A - \frac{B'B''}{B}, \quad \frac{1}{N} = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad \frac{1}{P} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

(V. HIOUX.)

En adoptant la notation indiquée, on trouve pour le déterminant D les coordonnées du centre *a*, *b*, *c*; et pour le terme tout connu F_1

$$D = \frac{BB'B''}{MNP}\left(\frac{M}{B^2} + \frac{N}{B'^2} + \frac{P}{B''^2} + \frac{1}{BB'B''}\right),$$

$$a = -MC + \frac{B'B''}{NPD}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$b = -NC' + \frac{B''B}{PMD}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$c = -PC'' + \frac{BB'}{MND}\left(\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right),$$

$$F_1 = -[MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1] + \frac{BB'B''}{DMNP}\left[\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C''\right]^2.$$

Les équations (1) et (2) expriment que la surface a une infinité de centres, et l'équation (3) que ces centres font partie de la surface.

Il faut remarquer l'expression simple des coordonnées du centre dans le cas où $\frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Gambey.

Question 1205

(voir p. 192);

Par M. A. PELLISSIER.

Les segments des normales en deux points d'une conique, compris entre ces points et un axe de la courbe, sont vus sous le même angle du point de concours des tangentes en ces points. (Joseph Bruno.)

Soient TM, TM' deux tangentes aux points M, M' et

MN, M′N′ les segments des normales compris entre les points de contact et un axe de la courbe; il faut démontrer que

$$\widehat{MTN} = \widehat{M'TN'}.$$

Abaissons la perpendiculaire TP sur l'axe, et menons les droites PM, PM′.

Les deux quadrilatères TPNM, TPN′M′ sont inscriptibles, et par conséquent on a

$$\widehat{MTN} = \widehat{MPN}, \quad \widehat{M'TN'} = \widehat{M'PN'}.$$

Or, la perpendiculaire TP étant la polaire du point A où la corde des contacts MM′ rencontre l'axe, le faisceau (P, AMTM′) est harmonique. Mais, puisque les deux rayons conjugués PA, PT sont rectangulaires, le rayon PT divise en deux parties égales l'angle des deux autres rayons PM, PM′; donc

$$\widehat{MPT} = \widehat{M'PT},$$

par suite

$$\widehat{MPN} = \widehat{M'PN'},$$

et enfin

$$\widehat{MTN} = \widehat{M'TN'}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. Moret-Blanc; Sondat; Chadu et B. Launoy; Vladimir Habbé, maître de Mathématiques à l'École Alexandre, à Nicolajeff (Russie méridionale).

QUESTIONS.

1215. Si l'on désigne par r, ρ et δ le rayon vecteur, le rayon de courbure et l'angle de déviation pour un point d'une courbe, et par r_1, ρ_1 et δ_1 les mêmes éléments pour le point correspondant d'une de ses transformées par rayons vecteurs réciproques, on a la relation

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \operatorname{tang} \delta = \left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^2 \operatorname{tang} \delta_1.$$

(Fouret.)

1216. Si du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole on décrit un cercle passant par les foyers, ce cercle coupera l'axe perpendiculaire à l'axe focal en deux points tels, que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque est constamment égale à la moitié du carré de l'axe focal. (Lez.)

1217. Si

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\alpha\gamma + 2h\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique, et A, B, C les angles que l'un des axes de la courbe fait avec les côtés du triangle de référence, on a

$$a \sin 2A + b \sin 2B + c \sin 2C + 2f \sin(B + C) + 2g \sin(C + A) + 2h \sin(A + B) = 0.$$

(A. Combier.)

CONSTRUCTION DE LA TANGENTE EN UN POINT DE LA QUADRATRICE;

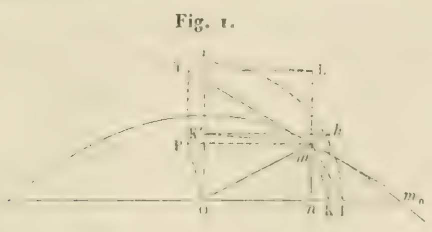
Par M. H. RESAL.

La méthode de Roberval, pour mener des tangentes aux courbes qui peuvent être décrites par un point mobile suivant une loi déterminée, est très-séduisante au premier abord; mais elle présente souvent des dangers dans son application, comme plusieurs géomètres l'ont fait ressortir en étudiant quelques cas particuliers. La quadratrice, qui n'offre à vrai dire qu'un intérêt historique, est l'une des courbes pour lesquelles on a faussé l'application de la méthode de Roberval et, sans m'arrêter à discuter les erreurs commises, je vais indiquer, pour la tangente, la construction la plus simple qui résulte logiquement de cette méthode.

Soient (*fig.* 1)

$Om_0 = a$ une longueur donnée mesurée sur une droite, censée horizontale pour fixer les idées, à partir d'un point déterminé O;

Fig. 1.



OK la longueur $\frac{2a}{\pi} = b$ portée sur cette droite à partir de la même origine O;

θ l'angle formé avec Om_0 par un rayon vecteur quelconque Om partant du point O;

$m_0 n = b\theta$ une longueur portée sur m_0O de m_0 vers O à partir du premier de ces points.

L'intersection m de la direction Om avec la perpendiculaire en n à Om est le point de la quadratrice correspondant à l'angle θ.

Si l'on fait varier θ proportionnellement au temps, le point m sera animé de deux vitesses simultanées proportionnelles à $-\frac{d\mathrm{O}n}{d\theta} = b$, $\frac{dnm}{d\theta}$ dirigées respectivement de n vers O et suivant le prolongement de nm.

Or on a

$$mn = (a - b\theta)\,\text{tang}\,\theta,$$

$$\frac{dmn}{d\theta} = \frac{(a - b\theta)}{\cos^2\theta} - b\,\text{tang}\,\theta = \frac{\mathrm{O}n}{\cos^2\theta} - b\,\text{tang}\,\theta,$$

$$\frac{\mathrm{O}n}{\cos^2\theta} = \frac{\mathrm{O}m}{\cos\theta} = \mathrm{OI},$$

I étant l'intersection de Om_0 avec la perpendiculaire en m à Om; d'où, en portant OI$'$ = OI à partir de O sur la perpendiculaire en ce point à Om_0,

$$\frac{dmn}{d\theta} = \mathrm{OI}' - b\,\text{tang}\,\theta.$$

J'élève en K la perpendiculaire Kh à Om_0 jusqu'à sa rencontre h avec la direction de Om, puis par le point h je mène une horizontale qui rencontre OI$'$ en K$'$. On a

$$\mathrm{K}h = \mathrm{OK}' = b\,\text{tang}\,\theta,$$

par suite

$$\frac{dmn}{d\theta} = \mathrm{I'K'}.$$

Je joins mK$'$; je construis sur cette droite et sur K$'$I$'$ le parallélogramme mK$'$I$'$L; je mène par le point O une parallèle à mK jusqu'à sa rencontre P avec l'hori-

zontale du point m. Il est visible que l'on a

$$mP = -\frac{dOn}{d\theta}, \quad mL = \frac{dmn}{d\theta},$$

de sorte que la diagonale mT du parallélogramme construit sur mP et mL donne la direction de la tangente à la courbe.

THÉORIE DES INDICES;

Par M. FAURE,
Chef d'escadron d'artillerie.

[SUITE (*).]

Relations entre deux groupes de m droites.

33. *Notations.* — Étant pris dans l'espace deux groupes de m points $ab\ldots m$; $a'b'\ldots m'$; joignons tous ces points au centre o de la surface S par les droites $\alpha, \beta, \ldots, \mu$, $\alpha'\beta', \ldots, \mu'$; et posons

$$\delta'_m = \begin{vmatrix} I_{\alpha\alpha'} & I_{\alpha\beta'} & \ldots & I_{\alpha\mu'} & \frac{1}{oa} \\ I_{\beta\alpha'} & I_{\beta\beta'} & \ldots & I_{\beta\mu'} & \frac{1}{ob} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{\mu\alpha'} & I_{\mu\beta'} & \ldots & I_{\mu\mu'} & \frac{1}{om} \\ \frac{1}{oa'} & \frac{1}{ob'} & \ldots & \frac{1}{om'} & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292.

Étant pris deux groupes de m directions arbitraires $\alpha\beta\ldots\mu$; $\alpha'\beta'\ldots\mu'$, posons

$$\alpha_m = \begin{vmatrix} \cos\alpha\alpha' & \cos\alpha\beta' & \ldots & \cos\alpha\mu' \\ \cos\beta\alpha' & \cos\beta\beta' & \ldots & \cos\beta\mu' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\mu\alpha' & \cos\mu\beta' & \ldots & \cos\mu\mu' \end{vmatrix},$$

$$\alpha'_m = \begin{vmatrix} \cos\alpha\alpha' & \cos\alpha\beta' & \ldots & \cos\alpha\mu' & 1 \\ \cos\beta\alpha' & \cos\beta\beta' & \ldots & \cos\beta\mu' & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \cos\mu\alpha' & \cos\mu\beta' & \ldots & \cos\mu\mu' & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\beta_m = \begin{vmatrix} \sin^2\frac{\alpha\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\alpha\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\alpha\mu'}{2} \\ \sin^2\frac{\beta\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\beta\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\beta\mu'}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin^2\frac{\mu\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\mu\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\mu\mu'}{2} \end{vmatrix},$$

$$\beta'_m = \begin{vmatrix} \sin^2\frac{\alpha\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\alpha\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\alpha\mu'}{2} & 1 \\ \sin^2\frac{\beta\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\beta\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\beta\mu'}{2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ \sin^2\frac{\mu\alpha'}{2} & \sin^2\frac{\mu\beta'}{2} & \ldots & \sin^2\frac{\mu\mu'}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Déterminant δ_m.

34. Le déterminant Δ'_m (27) peut se mettre sous la forme

$$\Delta'_m = \begin{vmatrix} I_{aa'}+1 & I_{ab'}+1 & \ldots & I_{am'}+1 & 1 \\ I_{ba'}+1 & I_{bb'}+1 & \ldots & I_{bm'}+1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ I_{ma'}+1 & I_{mb'}+1 & \ldots & I_{mm'}+1 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Si l'on remarque ensuite que (11)

$$\mathrm{I}_{aa'} + 1 = -\, oa \,.\, oa' \,\mathrm{I}_{\alpha\alpha'}, \quad \mathrm{I}_{ab'} + 1 = = oa \,.\, ob' \,\mathrm{I}_{\alpha\beta'}, \quad \ldots,$$

on trouvera, en posant

$$oa \,.\, ob \ldots om = \mathrm{P}_m, \quad oa' \,.\, ob' \ldots om' = \mathrm{P}'_m,$$

la relation

$$\delta'_m = \frac{\Delta'_m (-1)^{m-1}}{\mathrm{P}_m \mathrm{P}'_m}.$$

Des valeurs de Δ'_m, on déduit ce théorème :

Si l'on mène par le centre o de la surface S *deux groupes de m droites* $\alpha\beta\ldots\mu$, $\alpha'\beta'\ldots\mu'$ *aux deux groupes de points* $ab\ldots m$; $a'b'\ldots m'$:

1° *Le déterminant* δ'_m *est nul pour m plus grand que* 4.

2° *Si* $m = 4$,

$$\delta'_4 = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\sin\alpha}{oa} + \frac{\sin\beta}{ob} + \frac{\sin\gamma}{oc} + \frac{\sin\delta}{od}\right)$$
$$\left(\frac{\sin\alpha'}{oa'} + \frac{\sin\beta'}{ob'} + \frac{\sin\gamma'}{oc'} + \frac{\sin\delta'}{od'}\right),$$

en désignant par $\sin\alpha$ *le sinus de l'angle solide formé par les trois autres directions* β, γ, δ, *par* $\sin\beta$ *le sinus de l'angle solide formé par les directions* $\alpha, \gamma, \delta, \ldots$.

3° *Si* $m = 3$,

$$\delta'_3 = \frac{\sin\alpha\beta\gamma \sin\alpha'\beta'\gamma'}{(o, \mathrm{D})(o, \mathrm{D}')} \mathrm{I}_{\mathrm{D}_0 \mathrm{D}'_0};$$

D *et* D' *sont les plans* abc, $a'b'c'$; $\mathrm{D}_0, \mathrm{D}'_0$ *les plans diamétraux parallèles à ces plans.*

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$\delta'_2 = -\frac{\sin\alpha\beta \,.\, \sin\alpha'\beta'}{(o, \gamma)(o, \gamma')} \mathrm{I}_{\gamma_0\gamma'_0},$$

γ et γ' désignant ici les droites ab, $a'b'$; γ_0, γ_0 les diamètres de la surface, parallèles à ces droites.

Démonstration. — Lorsque m est plus grand que 4, $\Delta'_m = 0$, donc aussi δ'_m. Lorsque $m = 4$, on a

$$\delta'_4 = \frac{36abcd.a'b'c'd'}{\pi^2 P_4 P'_4};$$

or le volume $abcd$ est la somme algébrique des quatre volumes $ocbd$, $oacd$, $obad$, $oabc$, et l'on a

$$6ocbd = oc.ob.od \sin\alpha, \quad 6oacd = oa.oc.od \sin\beta, \ldots,$$

et par suite

$$\frac{6abcd}{P_4} = \frac{\sin\alpha}{oa} + \frac{\sin\beta}{ob} + \frac{\sin\gamma}{oc} + \frac{\sin\delta}{od},$$

et l'on a une valeur analogue pour $\frac{6a'b'c'd'}{P'_4}$; ce qui démontre la deuxième partie.

Nous avons ensuite

$$\delta'_3 = \frac{4abc.a'b'c' \, I_{D_0 D'_0}}{P_3 P'_3};$$

or,

$$\frac{2abc}{P_3} = \frac{2abc(o, D)}{P_3(o, D)} = \frac{oa.ob.oc \sin\alpha\beta\gamma}{P_3(o, D)} = \frac{\sin\alpha\beta\gamma}{(o, D)}.$$

On a de même

$$\frac{2a'b'c'}{P'_3} = \frac{\sin\alpha'\beta'\gamma'}{(o, D')},$$

ce qui démontre la troisième partie.

La dernière se prouve d'une manière analogue.

Dans la valeur de δ'_4 nous avons supposé le point o à l'intérieur des tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$; si cette condition n'était pas remplie, il faudrait changer les signes de quelques termes. On peut également la considérer comme générale en attribuant des signes aux sinus des angles solides.

Déterminant α_m.

35. Lorsque la surface S est une sphère, les éléments du déterminant δ_m ont pour valeur

$$I_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos\alpha\alpha'}{R^2}, \quad I_{\alpha\beta'} = -\frac{\cos\alpha\beta'}{R^2}, \quad \dots, \quad I_{\alpha\mu'} = -\frac{\cos\alpha\mu'}{R^2}, \dots,$$

de sorte que

$$\alpha_m = (-R^2)^m \delta_m.$$

Comme d'ailleurs les directions $\alpha\beta\dots\mu$, $\alpha'\beta'\dots\mu'$ qui figurent dans le déterminant α_m peuvent être considérées comme étant parallèles à des directions arbitraires de l'espace, nous pouvons dire :

Si l'on a dans l'espace deux groupes de m directions arbitraires $\alpha\beta\dots\mu$, $\alpha'\beta'\dots\mu'$:

1° *Lorsque m est plus grand que* 3,

$$\alpha_m = 0.$$

2° *Lorsque $m = 3$,*

$$\alpha_3 = \sin\alpha\beta\gamma \sin\alpha'\beta'\gamma'.$$

3° *Lorsque $m = 2$,*

$$\alpha_2 = \sin\alpha\beta \sin\alpha'\beta' \cos(\widehat{\alpha\beta, \alpha'\beta'}).$$

Remarque. — Si les droites α, β, γ sont parallèles à un même plan, $\alpha_3 = 0$.

Déterminant α'_m.

36. Lorsque la surface S est une sphère, on voit que

$$\delta'_m = \begin{vmatrix} \cos\alpha\alpha' & \cos\alpha\beta' & \dots & \cos\alpha\mu' & \frac{1}{oa} \\ \cos\beta\alpha' & \cos\beta\beta' & \dots & \cos\beta\mu' & \frac{1}{ob} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos\mu\alpha' & \cos\mu\beta' & \dots & \cos\mu\mu' & \frac{1}{om} \\ \frac{1}{oa'} & \frac{1}{ob'} & \dots & \frac{1}{om'} & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{(-R^2)^m}.$$

Et, si tous les points $ab\ldots m$, $a'b'\ldots m'$ sont situés sur la sphère de rayon R,

$$\alpha'_m = -(-R^2)^m \delta'_m.$$

Les valeurs de δ'_m conduisent à ce théorème :

Si l'on a dans l'espace deux groupes de m directions arbitraires $\alpha\beta\ldots\mu$, $\alpha'\beta'\ldots\mu'$:

1° *Lorsque m est plus grand que* 4,

$$\alpha'_m = 0.$$

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$\alpha'_4 = -(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)(\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' + \sin\delta').$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$\alpha'_3 = -\sin\alpha\beta\gamma \sin\alpha'\beta'\gamma' \frac{\cos\varphi}{\cos\mu \cos\mu'},$$

μ, μ' *indiquant les angles générateurs des cônes droits qui contiennent les directions* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *transportées parallèlement en un même point,* φ *l'angle formé par les axes de ces cônes.*

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$\alpha'_2 = -4 \sin\frac{\alpha\beta}{2} \sin\frac{\alpha'\beta'}{2} \cos\psi,$$

ψ *étant l'angle que forment les plans bissecteurs des directions* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$.

Démonstration. — Les deux premières parties du théorème sont évidentes d'après les valeurs de δ'_m et δ'_4.

3° Les directions α, β, γ transportées au centre o de la sphère parallèlement à elles-mêmes coupent cette sphère aux points abc déterminant le plan D; de même les directions $\alpha'\beta'\gamma'$, transportées au centre o, détermineront le plan $a'b'c'$ ou D'. Que l'on imagine les deux cônes droits qui passent par les droites $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, et soient μ, μ'

les angles générateurs de ces cônes, $(o, D) = R\cos\mu$, $(o, D') = R\cos\mu'$. Si φ est l'angle formé par les axes de ces cônes, l'indice du système des plans diamétraux parallèles aux plans D, D' a pour valeur $I_{D_0 D'_0} = -\frac{\cos\varphi}{R^2}$; ces valeurs, substituées dans l'expression de δ'_3 donnent α'_3.

4° Les directions α, β, transportées parallèlement au centre o, coupent la sphère aux points ab déterminant la droite γ; de même les directions α', β', transportées au centre o, coupent la sphère aux points $a'b'$, déterminant la droite γ',

$$(o, \gamma) = R\cos\frac{\alpha\beta}{2}, \qquad (o, \gamma') = R\cos\frac{\alpha'\beta'}{2};$$

d'autre part,

$$I_{\gamma_0\gamma'_0} = -\frac{\cos\gamma\gamma'}{R^2} = -\frac{\cos\psi}{R^2};$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de δ'_2, donnent α'_2.

Déterminant β_m.

37. *Si l'on a dans l'espace deux groupes de m directions arbitraires $\alpha\beta\ldots\mu$, $\alpha'\beta'\ldots\mu'$:*

1° *Lorsque m est plus grand que 4,*

$$\beta_m = 0.$$

2° *Lorsque m = 4,*

$$\beta_4 = -\frac{1}{16}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta)$$
$$(\sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' + \sin\delta').$$

3° *Lorsque m = 3, si l'on désigne par μ, μ' les angles générateurs des cônes droits qui passent par les directions $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ transportées en un même point, et par θ l'angle sur lequel se coupent ces cônes,*

$$\beta_3 \text{ [illegible] } \sin\alpha\beta\gamma \sin\alpha'\beta'\gamma' \,\mathrm{tang}\,\mu \,\mathrm{tang}\,\mu' \cos\theta.$$

4° *Lorsque $m = 2$, si l'on désigne par ψ l'angle que forment entre eux les plans bissecteurs des directions $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ transportées en un même point,*

$$\beta_2 = \sin\frac{\alpha\beta}{2}\sin\frac{\alpha'\beta'}{2}\left[\cos\frac{\alpha\beta}{2}\cos\frac{\alpha'\beta'}{2}\cos(\alpha\beta, \alpha'\beta') - \cos\psi\right].$$

Par le centre o de la sphère S menons des parallèles aux droites et désignons par $ab\ldots m$, $a'b'\ldots m'$ les points où elles coupent la sphère. On a généralement

$$mm' = 4R^2\sin^{-2}\frac{\mu\mu'}{2},$$

mm' étant le carré de la distance mm'. Il suit de là que le déterminant b_m (30) a pour valeur $(4R^2)^m\beta_m$, d'où

$$\beta_m = \frac{b_m}{(4R^2)^m}.$$

Si dans l'expression de b_4 on remplace les volumes $abcd$, $a'b'c'd'$ par leurs valeurs

$$6\,abcd = R^3\Sigma\sin\alpha, \quad 6\,a'b'c'd' = R^3\Sigma\sin\alpha',$$

on trouvera β_3. Dans celle de b_3, p représentant le produit des côtés du triangle abc, si r est le rayon du cercle circonscrit à ce triangle,

$$p = 4r.abc;$$

mais

$$r = (o, D)\tan\mu \quad \text{et} \quad 2abc\,(o, D) = R^3\sin\alpha\beta\gamma,$$

donc

$$p = 2R^3\sin\alpha\beta\gamma\tan\mu,$$

et de même

$$p' = 2R^3\sin\alpha'\beta'\gamma'\tan\mu'.$$

Dans la valeur de b_2, nous avons

$$ab = R\sin\frac{\alpha\beta}{2}, \quad (o, \gamma) = R\cos\frac{\alpha\beta}{2};$$

D est le plan $\alpha\beta$, enfin les plans diamétraux perpendiculaires aux cordes ab, $a'b'$ font entre eux un angle ψ et sont bissecteurs des angles $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$.

38. Dans l'expression de b_3 supposons les points abc dans un plan diamétral D, les points $a'b'c'$ dans un plan diamétral D'

$$b_3 = 32\, abc.a'b'c'\, R^2 \cos DD'.$$

Désignant comme ci-dessus par $\alpha\beta\gamma$ les rayons oa, ob, oc, par $\alpha'\beta'\gamma'$ les rayons oa', ob', oc', on a

$$abc = \frac{R^2}{2}(\sin\alpha\beta + \sin\beta\gamma + \sin\gamma\alpha),$$

donc

$$b_3 = 8R^6(\sin\alpha\beta + \sin\beta\gamma + \sin\gamma\alpha) \times (\sin\alpha'\beta' + \sin\beta'\gamma' + \sin\gamma'\alpha')\cos DD'.$$

Revenant à la valeur de $\beta_3 = \frac{b^3}{4^3 R^6}$, on a ce théorème :

Étant prises dans un plan D *trois droites* $\alpha\beta\gamma$, *dans un plan* D' *trois droites* $\alpha'\beta'\gamma'$, *si l'on forme le déterminant* β_3, *on a*

$$\beta_3 = \frac{1}{8}(\sin\alpha\beta + \sin\beta\gamma + \sin\gamma\alpha) \times (\sin\alpha'\beta' + \sin\beta'\gamma' + \sin\gamma'\alpha')\cos DD'.$$

Déterminant β'_m.

39. A cause de la relation $\cos a = 1 - 2\overline{\sin}^2 \frac{1}{2}a$, on voit que

$$\beta'_m = \frac{\alpha'_m}{(-2)^{m-1}}.$$

On obtient donc les valeurs de β'_m en divisant celles de α'_m par $(-2)^{m-1}$.

Relations entre deux groupes de m plans.

40. *Notations.* — Étant pris deux groupes de m plans ABC...M, A'B'C'...M', posons

$$\nabla'_m = \begin{vmatrix} I_{AA'} & I_{AB'} & \ldots & I_{AM'} & (o, A) \\ I_{BA'} & I_{BB'} & \ldots & I_{BM'} & (o, B) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ I_{MA'} & I_{MB'} & \ldots & I_{MM'} & (o, M) \\ (o, A') & (o, B') & \ldots & (o, M') & o \end{vmatrix},$$

les indices étant pris par rapport à la surface S, dont le centre est au point o.

Deux plans R, S étant donnés, si P est le plan diamétral qui passe par leur intersection, nous désignerons par D_{RS} l'expression $\frac{\overline{\sin}^2 RS}{\sin PR \sin PS} I_P$, et nous poserons

$$A_m = \begin{vmatrix} D_{AA'} & D_{AB'} & \ldots & D_{AM'} \\ D_{AB'} & D_{BB'} & \ldots & D_{BM'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{MA'} & D_{MB'} & \ldots & D_{MM'} \end{vmatrix},$$

$$A'_m = \begin{vmatrix} D_{AA'} & D_{AB'} & \ldots & D_{AM'} & (o, A) \\ D_{BA'} & D_{BB'} & \ldots & D_{BM'} & (o, B) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{MA'} & D_{MB'} & \ldots & D_{MM'} & (o, M) \\ (o, A') & (o, B') & \ldots & (o, M') & o \end{vmatrix}.$$

Nous poserons encore

$$B_m = \begin{vmatrix} \overline{\cos}^2 \frac{AA'}{2} & \overline{\cos}^2 \frac{AB'}{2} & \ldots & \overline{\cos}^2 \frac{AM'}{2} \\ \overline{\cos}^2 \frac{BA'}{2} & \overline{\cos}^2 \frac{BB'}{2} & \ldots & \overline{\cos}^2 \frac{BM'}{2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \overline{\cos}^2 \frac{MA'}{2} & \overline{\cos}^2 \frac{MB'}{2} & \ldots & \overline{\cos}^2 \frac{MM'}{2} \end{vmatrix},$$

$$B'_m = \begin{vmatrix} \cos^2\frac{\overline{AA'}}{2} & \cos^2\frac{\overline{AB'}}{2} & \cdots & \cos^2\frac{\overline{AM'}}{2} & 1 \\ \cos^2\frac{\overline{BA'}}{2} & \cos^2\frac{\overline{BB'}}{2} & \cdots & \cos^2\frac{\overline{BM'}}{2} & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cos^2\frac{\overline{MA'}}{2} & \cos^2\frac{\overline{MB'}}{2} & \cdots & \cos^2\frac{\overline{MM'}}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

Déterminant ∇'_m.

41. *Étant pris deux groupes de m plans* AB...M; A'B'...M' :

1° *Le déterminant* $\nabla'_m = 0$ *pour m plus grand que* 4.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$\nabla'_4 = \frac{1}{\pi^4} \frac{(3V)^3}{2ABCD} \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$\nabla'_3 = \frac{1}{\pi^2} \sin ABC \sin A'B'C' \, od.od' \, I_{\delta\delta'},$$

d, *d' étant les sommets des trièdres* ABC, A'B'C', *et* δ, δ' *les diamètres od, od'*.

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$\nabla'_2 = -\sin AB \sin A'B' (o, \nu)(o, \nu') I_{NN'},$$

ν, ν' *étant les intersections* AB, A'B'; N, N' *les plans diamétraux qui passent par ces intersections.*

Démonstration. — Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & \cdots & M & P \\ A' & B' & \cdots & M' & P' \end{vmatrix}$$

formé à l'aide des deux groupes de $m+1$ plans AB...P, A'B'...P'.

Si l'on suppose que les deux derniers P, P′ coïncident avec le plan de l'infini, en remarquant que dans cette hypothèse (13)

$$\frac{I_{AP'}}{(o,A)(o,P')} = \frac{I_{BP'}}{(o,B)(o,P')} \cdots \frac{I_{MP'}}{(o,M)(o,P')}$$
$$= \frac{I_{PA'}}{(o,P)(o,A')} = \ldots = \frac{I_{PP'}}{(o,P)(o,P')} = \frac{1}{\pi^2},$$

on trouvera la relation

$$\frac{\pi^4}{(o,P)(o,P')} \begin{vmatrix} A & B & \ldots & M & P \\ A' & B' & \ldots & M' & P' \end{vmatrix} = \pi^2 \begin{vmatrix} A & B & \ldots & M \\ A' & B' & \ldots & M' \end{vmatrix} + \nabla'_m.$$

Les 1° et 2° sont donc évidents d'après la valeur de ∇_m (8).

3° On a pour $m = 3$

$$\nabla'_3 = \frac{\pi^4}{(o,P)(o,P')} \begin{vmatrix} A & B & C & P \\ A' & B' & C' & P' \end{vmatrix} - \pi^2 \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après la valeur de ∇_4, en supposant P et P′ à distance finie,

$$\begin{vmatrix} A & B & C & P \\ A' & B' & C' & P' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi^6} \sin ABC \sin A'B'C' (d,P)(d',P');$$

d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^4} \sin ABC \sin A'B'C' \, I_{dd'},$$

d, d' étant les sommets des trièdres ABC, A′B′C′. Lors donc que les plans P, P′ seront à l'infini, on aura

$$\pi^2 \nabla'_3 = -\sin ABC \sin A'B'C' (1 + I_{dd'})$$
$$= \sin ABC \sin A'B'C' \, od.od' \, I_{\delta\delta'},$$

puisque (11)

$$1 + I_{dd'} \quad od.od' \, I_{\delta\delta'}.$$

4° On a, pour $m = 2$,

$$\nabla'_2 = \frac{\pi^4}{(o, P)(o, P')}\begin{vmatrix} A & B & P \\ A' & B' & P' \end{vmatrix} - \pi^2 \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Or, d'après la valeur de ∇_3, les plans P, P' étant à distance finie

$$\begin{vmatrix} A & B & P \\ A' & B' & P' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^4} \sin AB \sin A'B' \sin(\nu, P) \sin(\nu', P') I_{dd'},$$

les points d, d' étant les sommets des trièdres ABP, A'B'P'. Prenons un point c sur l'intersection AB, un point c' sur l'intersection A'B' :

$$(c, P) = cd \sin(\nu, P), \quad (c', P') = c'd' \sin(\nu', P');$$

d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\nu\nu'},$$

d'où résulte

$$\nabla'_2 = \sin AB \sin A'B' \left[\frac{(c, P)(c', P')}{(o, P)(o, P')} \frac{I_{dd'}}{cd\, c'd'} + I_{\nu\nu'}\right].$$

Si maintenant les plans P, P' s'éloignent à l'infini en se rappelant la relation $I_{dd'} = -1 - od.od' I_{\nu_0\nu'_0}$, on aura

$$\nabla'_2 = \sin AB \sin A'B' (-I_{\nu_0\nu'_0} + I_{\nu\nu'});$$

or, d'après (12). on a

$$I_{\nu\nu'} - I_{\nu_0\nu'_0} = -(o, \nu)(o, \nu') I_{NN'}.$$

Déterminant Λ_m.

42. *Si l'on considère deux groupes de m plans,* AB...M; A'B'...M', *tangents à une surface du second degré* S :

1° *Le déterminant* Λ_m *est nul lorsque m est plus grand que* 4.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$A_4 = -\frac{16}{\pi^6}\frac{(3V)^3}{2ABCD}\frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$A_3 = -\frac{8}{\pi^4}\sin ABC \sin A'B'C' I_{dd'}.$$

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$A_2 = -\frac{4}{\pi^2}\sin AB \sin A'B' I_{cc'}.$$

Ce théorème se déduit des valeurs de ∇_m, en remarquant que, d'après la relation (20), on a $2I_{AB} = -D_{AB}$ lorsque les plans A et B touchent la surface S. De là résulte

$$A_m = (-2)^m \nabla_m.$$

Déterminant A'_m.

43. *Étant pris arbitrairement deux groupes de m plans* AB...M; A'B'...M' :

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $A'_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$A'_4 = -\frac{8}{\pi^4}\frac{(3V)^3}{2ABCD}\frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$A'_3 = \frac{4}{\pi^2}\sin ABC \sin A'B'C'\, od.od'\, I_{\delta\delta'}.$$

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$A'_2 = 2\sin AB \sin A'B' (o,\nu)(o,\nu') I_{CC'}.$$

A l'aide de la relation générale (20)

$$\frac{2I_{AB}}{(o,A)(o,B)} = \frac{I_A}{(o,A)^2} + \frac{I_B}{(o,B)^2} - \frac{D_{AB}}{(o,A)(o,B)},$$

on établira la relation

$$A'_m = (-2)^{m-1}\nabla'_m,$$

de la même manière que nous avons démontré la relation $a'_m = (-2)^{m-1}\Delta'_m$.

Déterminant B_m

44. Lorsque la surface S est une sphère de rayon R et que de plus tous les plans touchent la sphère, on a

$$D_{AB} = -\frac{4\,\overline{\cos}^2\,\frac{1}{2}AB}{R^4},$$

de sorte que

$$B_m = \left(-\frac{R^4}{4}\right)^m A_m.$$

De là, *si l'on désigne par* AB...M, A'B'...M' *deux groupes de m plans tangents à une sphère de rayon* R *et de centre o* :

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $B_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$B_4 = -\frac{1}{16R^2}\,\frac{3V^3}{2\,ABCD}\,\frac{3V'^3}{2\,A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$B_3 = \frac{1}{8}\sin ABC \sin A'B'C'\left(\frac{od.od'\cos dod'}{R^2} - 1\right),$$

d, d' étant les sommets des trièdres ABC, A'B'C'.

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$B_2 = -\frac{1}{4}\sin AB \sin A'B'\left[\frac{o,\nu\;\;o,\nu'\cos NN'}{R^2} - \cos\nu\nu'\right],$$

ν, ν' étant les intersections AB, A'B'; NN' *les plans diamétraux passant par ces droites.*

Déterminant B'_m.

45. La substitution précédente faite dans le déterminant A'_m, dans lequel les distances (o, A), $(o, B)\ldots(o, A')$, $(o, B'\ldots)$ sont toutes égales à R, donne

$$B'_m = \left(-\frac{R^4}{4}\right)^{m-1}\frac{A'_m}{R^2}.$$

De là, *si l'on désigne par* AB...M, A'B'...M' *deux groupes de m plans tangents à une sphère de rayon* R *et de centre o* :

1° *Lorsque m est plus grand que* 4, $B'_m = 0$.

2° *Lorsque* $m = 4$,

$$B'_4 = \frac{1}{8R^2}\,\frac{(3V)^3}{2\,ABCD}\,\frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'D'}.$$

3° *Lorsque* $m = 3$,

$$B'_3 = -\frac{1}{4R^2}\sin ABC \sin A'B'C'\; od.od' \cos dod'.$$

4° *Lorsque* $m = 2$,

$$B'_2 = \frac{1}{2R^2}\sin AB \sin A'B'\,(o, \nu)\,(o, \nu')\cos NN'.$$

(*A suivre.*)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES INSCRITES OU CIRCONSCRITES AU QUADRILATÈRE;

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Chef d'escadron d'artillerie.

Dans les questions sur les courbes inscrites ou circonscrites au quadrilatère, on peut tirer parti d'un théo-

rème, dont le calcul des déterminants fournit d'ailleurs une démonstration si simple que je me bornerai à l'énoncer.

1. Théorème. — Lorsque quatre droites sont telles que trois quelconques ne concourent pas, il est permis d'admettre que leurs équations ont été préparées de manière à donner l'identité

$$A + B + C + D = 0. \qquad (1)$$

C'est ce que je supposerai dans ce qui va suivre, où

$$A = a_1 x + a_2 y + a_3 = 0,$$
$$P = p_1 x + p_2 y + p_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

représenteront des équations générales de droites ; A_0 et P_0 les résultats de la substitution des coordonnées x_0, y_0 d'un point particulier, dans ces équations.

2. *Exemple.* — Lorsqu'on prend pour axes deux diagonales d'un quadrilatère complet, pour avoir l'identité (1), il suffit d'écrire les équations des côtés ainsi :

$$A = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

$$B = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} - 1 = 0,$$

$$-C = \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} - 1 = 0,$$

$$-D = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

3. *Corollaires.* — Parmi les conséquences variées qu'on peut tirer du théorème (1), j'indiquerai seulement certaines équations qu'on aura besoin de reconnaître par la suite.

Équations des diagonales du quadrilatère.

$$P = \pm(A + B) = \mp(C + D) = 0,$$
$$Q = \pm(A + C) = \mp(B + D) = 0,$$
$$R = \pm(A + D) = \mp(B + C) = 0.$$

Équations des droites qui joignent l'intersection de deux diagonales aux sommets de la troisième.

$$P + Q = \pm(A - D) = 0 \quad \text{et} \quad P - Q = \pm(B - C) = 0,$$
$$P + R = \pm(A - C) = 0 \quad \text{et} \quad P - R = \pm(B - D) = 0,$$
$$Q + R = \pm(A - B) = 0 \quad \text{et} \quad Q - R = \pm(C - D) = 0.$$

Equation générale des coniques tangentes à quatre droites.

$$(\mu A + \mu' B - \mu'' C)^2 - 4\mu\mu' AB = 0,$$

pour

$$\mu + \mu' + \mu'' = 0;$$

d'où

$$\lambda P^2 + \lambda' Q^2 + \lambda'' R^2 = 0,$$

pour

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\lambda''} = 0.$$

Coniques inscrites au quadrilatère.

4. Théorème. — Le lieu des pôles d'une droite fixe est une autre droite; ces deux lignes sont telles que leurs points d'intersection avec chaque diagonale sont conjugués harmoniques des sommets.

Ce théorème fournit un moyen de trouver, d'une manière assez simple, les points de contact de la conique tangente à cinq droites, car ce point est, pour chaque droite, celui où elle est rencontrée par sa conjuguée, prise relativement au quadrilatère des quatre autres droites.

Il comprend, comme cas particulier, lorsque la droite

fixe est à l'infini, le théorème sur le lieu des centres des coniques inscrites, car la conjuguée, passant alors par les milieux des diagonales, fournit ce lieu.

Pour démontrer le théorème (4), on n'a qu'à identifier, terme à terme, l'équation de la polaire qui contient un coefficient dont on est maître, avec celle d'une droite $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$, ce qui donne

$$\lambda P p_1 + \lambda' Q q_1 + \lambda'' R r_1 = \frac{1}{\alpha},$$

$$\lambda P p_2 + \lambda' Q q_2 + \lambda'' R r_2 = \frac{1}{\beta},$$

$$\lambda P p_3 + \lambda' Q q_3 + \lambda'' R r_3 = -1.$$

Soient

$$D = \begin{vmatrix} p_1 q_1 r_1 \\ p_2 q_2 r_2 \\ p_3 q_3 r_3 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} q_1 r_1 \frac{1}{\alpha} \\ q_2 r_2 \frac{1}{\beta} \\ q_3 r_3 - 1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} r_1 p_1 \frac{1}{\alpha} \\ r_2 p_2 \frac{1}{\beta} \\ r_3 p_3 - 1 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 q_1 \frac{1}{\alpha} \\ p_2 q_2 \frac{1}{\beta} \\ p_3 q_3 - 1 \end{vmatrix};$$

on trouvera

$$\frac{P}{D_1} + \frac{Q}{D_2} + \frac{R}{D_3} = 0.$$

on peut étudier les propriétés de cette droite, en se plaçant dans les conditions de l'exemple (1), où l'on a

$$P = x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) + y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) - 2,$$

$$Q = y\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right),$$

$$R = x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right).$$

5. *Solutions des questions* 1199 *et* 1200.

Pour l'équation de l'enveloppe de la polaire d'un point fixe (x_0, y_0), on trouvera sans difficulté

$$(PP_0 + QQ_0 - RR_0)^2 - 4PQP_0Q_0 = 0,$$

ce qui est l'équation d'une conique tangente aux trois diagonales, aux points où elles sont rencontrées par les polaires du point fixe, prises relativement aux trois systèmes de droites que l'on obtient en joignant l'intersection de deux diagonales aux sommets de la troisième.

Quant au lieu des points de contact des tangentes parallèles à une direction donnée, on l'obtiendra, assez simplement, en prenant l'axe des x parallèle à cette direction, ce qui donne

$$\lambda P p_1 + \lambda' Q q_1 + \lambda'' R r_1 = 0.$$

Dans ces conditions, le lieu est représenté par l'équation du troisième degré

$$\frac{P}{Qr_1 - Rq_1} + \frac{Q}{Rp_1 - Pr_1} + \frac{R}{Pq_1 - Qp_1} = 0.$$

Coniques circonscrites au quadrilatère.

Je me bornerai à mentionner deux théorèmes dont les démonstrations sont extrêmement simples.

6. Théorème. — Le lieu des pôles d'une droite fixe est une conique passant par neuf points, savoir : les centres des trois systèmes de cordes communes et les conjugués harmoniques, relativement aux sommets, des points d'intersection de la droite avec chacune des six cordes.

En d'autres termes : si l'on coupe par une droite les

trois systèmes de droites qui passent par quatre points, les conjugués harmoniques des six points d'intersection, relativement aux sommets du quadrilatère, sont sur une conique circonscrite au triangle formé par les centres des systèmes de droites.

Comme cas particulier, lorsque la droite est à l'infini, on retrouve la conique des neuf points, lieu des centres des coniques circonscrites.

7. Théorème. — Les polaires d'un point fixe concourent en un point qui est l'intersection des polaires du premier, prises relativement à chacun des trois systèmes de cordes communes.

Cette propriété fournit un moyen de construire les tangentes de la conique déterminée par cinq points.

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE BEHA-EDDIN SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE ;

Par M. Édouard LUCAS.

L'auteur arabe Behâ-Eddin, qui vécut de 1547 à 1622, a proposé à la fin de son Traité de calcul, intitulé *Khélasat al Hisàb,* la résolution du système des deux équations simultanées

$$x^2 + x + 2 = u^2,$$
$$x^2 - x - 2 = v^2,$$

en nombres rationnels. Nous remplacerons les inconnues rationnelles du système précédent par des inconnues entières, et nous considérerons par conséquent le système

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \\ x^2 - xy - 2y^2 = v^2. \end{array} \right.$$

Le traducteur français de l'ouvrage en question (*) avait trouvé seulement la solution $x = 17, y = -16$, et en avait conclu, comme le présumait l'auteur arabe, que ce problème est impossible à résoudre en nombres entiers et positifs. M. Genochi (**), dans un remarquable commentaire des ouvrages de Léonard de Pise, a donné la solution $x = 34, y = 15$ à l'aide d'un artifice particulier employé souvent par Diophante et par Fermat, mais il n'a point donné la solution complète du système (1). La méthode que nous proposons ici nous paraît conduire à la résolution complète du problème de Behâ-Eddin.

On déduit du système (1), dans lequel on peut supposer que les indéterminées x, y, u, v représentent des nombres entiers premiers entre eux, l'équation

$$u^2 + v^2 = 2x^2,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2.$$

On doit donc poser, d'après la formule connue de résolution des triangles rectangles dont les côtés sont entiers,

$$\frac{1}{2}(u - v) = 2rs,$$

$$\frac{1}{2}(u + v) = r^2 - s^2;$$

et par suite,

$$u = r^2 - s^2 + 2rs,$$
$$v = r^2 - s^2 - 2rs,$$
$$x = r^2 + s^2;$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1[re] série, t. V, p. 323; année 1846.

(**) *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, pubblicati da Baltasare Boncompagni, Note analitiche di Angelo Genocchi.* Roma, 1855, p. 85 et 91.

en portant ces valeurs dans l'équation obtenue et retranchant membre à membre les deux équations du système proposé, on obtient

$$2y^2 + xy = 4rs(r^2 - s^2);$$

et, en résolvant cette équation par rapport à y, on a

$$y = \frac{-x \pm t}{4},$$

t étant l'une des inconnues de l'équation biquadratique

$$(2) \qquad (r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2.$$

Ainsi donc le système de Behâ-Eddin est ramené à l'équation (2), qui représente la mise en équation du problème suivant :

Problème. — *Trouver en nombres entiers un triangle rectangle tel, que l'aire du carré de l'hypoténuse augmentée de trente-deux fois l'aire du triangle soit égale à un carré parfait.*

L'équation (2), peut être remplacée par la suivante :

$$(r^2 + 16rs - s^2)^2 - t^2 = 252\, r^2 s^2;$$

mais, si l'on remarque que le premier membre est le produit de deux facteurs dont le plus grand commun diviseur est égal à 2, on en déduit, en supposant que l'inconnue t peut être positive ou négative,

$$r^2 + 16rs - s^2 + t = \pm 14(3p)^2,$$
$$r^2 + 16rs - s^2 - t = \pm 2q^2,$$
$$rs = pq.$$

L'addition des deux premières équations nous conduit au nouveau système

$$r^2 + 16rs - s^2 = \pm(63p^2 + q^2),$$
$$rs = pq.$$

Posons maintenant $r = mp$, et $q = ms$, nous obtenons l'une ou l'autre des deux équations

$$(3) \qquad m^2p^2 + 16mps - s^2 = \pm(63p^2 + m^2s^2).$$

Premier cas. — Si nous exprimons que la valeur de m, tirée de l'équation précédente dont le second membre est pris avec le signe $+$, est rationnelle, nous obtenons

$$m = \frac{8ps \pm t}{s^2 - p^2}$$

avec la condition

$$(9p^2 - s^2)(7p^2 + s^2) = U^2.$$

Cette équation est immédiatement satisfaite par les valeurs

$$p = 1, \quad s = 1, \quad U = 8,$$

desquelles on tire, mais dans ce cas seulement par exception, puisque le dénominateur de m s'annule, à l'aide de l'équation en m qui devient linéaire,

$$m = 4,$$

et par suite les deux solutions du système (1) indiquées plus haut. On déduit de la dernière équation

$$(4) \qquad \begin{cases} 9p^2 - s^2 = 8g^2, \\ 7p^2 + s^2 = 8h^2, \end{cases}$$
$$U = 8gh;$$

et, par addition et soustraction,

$$2p^2 = g^2 + h^2,$$
$$p^2 - s^2 = 4(g^2 - h^2).$$

La première des deux équations précédentes est résolue par les formules

$$p = a^2 + b^2,$$
$$g = a^2 - b^2 - 2ab,$$
$$h = a^2 - b^2 + 2ab,$$

et, en portant ces valeurs dans la seconde, on trouve

$$(a^2+b^2)^2+32ab(a^2-b^2)=s^2;$$

c'est précisément l'équation (2) avec des indéterminées beaucoup plus petites. Ainsi donc, d'une solution quelconque (r, s, t) de l'équation

$$(2)\qquad (r^2+s^2)^2+32rs(r^2-s^2)=t^2,$$

on déduit deux solutions nouvelles R, S, T à l'aide des formules

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} m &= t(r^2+s^2)\pm(r^4+s^4-6r^2s^2),\\ n &= 4rs(r^2-s^2),\\ \mathrm{R} &= m(r^2+s^2),\\ \mathrm{S} &= nt,\\ \mathrm{T} &= 63n^2(r^2+s^2)^2-m^2t^2; \end{aligned}\right.$$

et l'on a ensuite pour le système proposé :

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{aligned} x &= r^2+s^2,\\ 4y &= -(r^2+s^2)\pm t,\\ u &= r^2-s^2-2rs,\\ v &= r^2-s^2+2rs. \end{aligned}\right.$$

Second cas. — Il reste à considérer le système déduit de l'équation (3) en prenant le signe inférieur. Pour que la valeur de m soit rationnelle, on doit avoir

$$m=\frac{-8ps\pm\mathrm{U}}{s^2+p^2},$$

avec l'équation de condition

$$(s^2-7p^2)(s^2+9p^2)=\mathrm{U}^2,$$

de laquelle on déduit évidemment le système

$$\begin{aligned} s^2-7p^2 &= g^2,\\ s^2+9p^2 &= h^2,\\ \mathrm{U} &= gh. \end{aligned}$$

On obtient aisément

$$16p^2 = h^2 - g^2,$$

et par suite

$$h + g = 2u^2,$$
$$h - g = 8v^2,$$
$$p = uv.$$

En portant ces valeurs dans l'une des équations du système précédent, nous avons

$$u^4 - u^2v^2 + 16v^4 = s^2,$$

ou encore

$$(u^2 + 4v^2)^2 - 9u^2v^2 = s^2.$$

La décomposition en facteurs donne

$$u^2 + 4v^2 \pm s = 9z^2,$$
$$u^2 + 4v^2 \mp s = w^2,$$
$$uv = wz,$$

et par suite le système

$$2u^2 + 8v^2 = 9z^2 + w^2,$$
$$uv = wz.$$

Posons, comme précédemment, $u = mw$, $z = mv$; il en résulte

$$m^2 = \frac{8v^2 - w^2}{9v^2 - 2w^2}.$$

Puisque la valeur de m doit être rationnelle, on doit avoir

$$9v^2 - 2w^2 = \alpha c^2,$$
$$8v^2 - w^2 = \alpha d^2,$$

α représentant le plus grand commun diviseur entre les deux premiers membres des équations précédentes. Mais si l'on suppose $\alpha = \pm 1$ ou $\alpha = -7$, les équations sont impossibles suivant les modules 2 et 3; on doit donc poser $\alpha = 7$, et conséquemment

$$9v^2 - 2w^2 = 7c^2,$$
$$8v^2 - w^2 = 7d^2,$$

ou encore

$$9d^2 - w^2 = 8c^2,$$
$$7d^2 + w^2 = 8v^2.$$

Ce système est identique avec le système (4), mais contient des indéterminées plus petites. Et ainsi le problème de Behâ-Eddin se trouve complétement résolu, sauf erreur, pour la première fois (*).

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS GÉNÉRAL, ANNÉE 1875

(voir p. 88 et 89);

PHILOSOPHIE.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

Deux triangles équilatéraux égaux ABC, A′B′C′ *sont disposés dans deux plans parallèles de façon que les sommets de l'un et les pieds des perpendiculaires abaissées des sommets du second sur le plan du premier soient les sommets d'un hexagone régulier. Les centres des deux triangles étant* O *et* O′, *on demande de déterminer la figure du solide commun aux deux tétraèdres* O′ABC, OA′B′C′, *et d'exprimer le volume de ce solide à l'aide du côté a des triangles équilatéraux et de la distance d de leurs plans.*

Menons les médianes AD, A′D′ (**), elles sont égales et parallèles. Les droites OD, O′D′ étant égales et parallèles, le quadrilatère ODO′D′ est un parallélogramme :

(*) Extrait de recherches nouvelles sur les Ouvrages de Léonard de Pise, publiées par M. le prince B. Boncompagni.

(**) Le lecteur est prié de faire la figure.

donc OD' est égale et parallèle à $O'D$; mais, par les conditions de l'énoncé, BC est aussi égale et parallèle à $B'C'$: donc les plans $O'BC$, $OB'C'$ sont parallèles. Il en est de même, pour une raison semblable, des plans $O'AC$, $OA'C'$ et des plans $O'AB$, $OA'B'$. Il s'ensuit que le volume commun aux deux tétraèdres, étant limité par six plans parallèles deux à deux, est un parallélépipède.

Soit E l'intersection des droites $O'A$, OD', contenues dans le plan $ODO'D'$. Les triangles semblables $O'ED'$, AEO donnent

$$\frac{O'E}{AE} = \frac{O'D'}{AO} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$O'E = \frac{1}{3} O'A.$$

Les arêtes latérales de chacun des tétraèdres sont coupées par les faces de l'autre au tiers de leur longueur à partir du sommet; et, à cause de l'égalité des arêtes latérales, les faces du parallélépipède sont des losanges égaux ayant pour côté le tiers des arêtes latérales des tétraèdres; la surface de chacun de ces losanges est les $\frac{2}{9}$ d'une face latérale des tétraèdres, puisqu'elle se compose de deux triangles semblables à cette face, et de côté trois fois moindre.

En prenant pour bases une face du parallélépipède et la face latérale du tétraèdre sur laquelle elle est appliquée, les hauteurs des deux solides sont dans le rapport $\frac{O'E}{O'A} = \frac{1}{3}$: donc le volume du parallélépipède est les $\frac{2}{9}$ de celui du tétraèdre, ou

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{12} d \times \frac{2}{9} = \frac{a^2 d\sqrt{3}}{54}.$$

Note. — Le même résultat a été trouvé par M. Wisselink.

SECONDE

(p. 88 et 89);

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

I. *Lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites données est constante. Lieu géométrique des points dont la somme des distances à trois droites données est constante.*

Je démontrerai d'abord le théorème suivant :

Si deux points M_1, M_2 *sont tels que la somme des distances de chacun d'eux à plusieurs droites données est égale à une constante donnée* l, *tout point intermédiaire* M *de la droite qui les joint jouit de la même propriété, pourvu que cette droite ne traverse aucune des droites données.*

Je suppose que les droites données sont au nombre de trois.

Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x, y, z les distances des points M_1, M_2, M à ces droites. Si, du point M_1, on abaisse des perpendiculaires sur les distances, les triangles semblables donneront, en grandeur et en signe :

$$\frac{x - x_1}{MM_1} = \frac{x_2 - x_1}{M_2M_1};\quad \frac{y - y_1}{MM_1} = \frac{y_2 - y_1}{M_2M_1};\quad \frac{z - z_1}{MM_1} = \frac{z_2 - z_1}{M_2M_1}.$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, il vient

$$\frac{(x + y + z) - (x_1 + y_1 + z_1)}{MM_1} = \frac{(x_2 + y_2 + z_2) - (x_1 + y_1 + z_1)}{M_2M_1}.$$

Or le second membre de cette dernière égalité est nul par hypothèse : donc le premier membre l'est aussi, et l'on a

$$x + y + z = x_1 + y_1 + z_1 = l. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1° Soient deux droites L, L′ qui se coupent en O. Menons à la distance donnée l une parallèle à L, qui coupe L′ en un point A; puis, prenons les droites $OB = OC = OD = OA$.

Les quatre points A, B, C, D seront évidemment des points du lieu demandé, qui, en vertu du théorème démontré, sera formé par le périmètre du rectangle ABCD. Les prolongements des côtés de ce rectangle appartiennent au lieu des points dont la différence des distances aux deux droites données est égale à l.

Les deux droites données, L, L′ peuvent être parallèles; soit d leur distance.

$l > d$. Le lieu se compose de deux parallèles menées à la distance $\frac{l}{2}$ de la parallèle équidistante des deux droites données.

$l = d$. Le lieu est la partie du plan comprise entre les deux parallèles L, L′.

$l < d$. Il n'y a pas de solution.

2° Si l'on donne trois droites, on déterminera les points du lieu, situés sur chacune d'elles, ce qui rentre dans le cas précédent, puisque l'une des trois distances devient nulle. Il n'y aura plus qu'à joindre ces points par des droites qui ne traversent pas les droites données. Le lieu sera donc, en général, le périmètre d'un hexagone ayant ses sommets deux à deux, sur les droites données (*).

II. *Construire un triangle* MNP, *sachant que ses côtés vont passer par trois points fixes* A, B, C; *que les*

(*) M. Moret-Blanc a fait suivre cette solution d'une discussion assez étendue, relative aux différentes positions des trois droites données dans leur plan. Nous regrettons de devoir, faute d'espace, laisser cette discussion à faire au lecteur.

sommets M *et* N *sont sur un cercle fixe passant par les points* A *et* B; *et enfin que l'angle* P *a une valeur donnée.*

L'angle P formé par les lignes AM, BN a pour mesure la demi-somme, ou la demi-différence des arcs AB et MN, suivant que le point P est intérieur, ou extérieur au cercle. Comme on connaît l'angle P, on en déduira l'arc MN et la corde MN (*).

III. *Étant donnée une équation du second degré, former les équations qui ont pour racines :*

1° *Les carrés des racines de la première;*

2° *Les inverses des racines de la première;*

Rechercher quels doivent être les coefficients de la première équation pour que l'équation qui admet pour racines les carrés des racines de la première ne diffère pas de cette équation.

Soient

$$x^2 + px + q = 0 \quad (1)$$

l'équation donnée, et

$$X^2 + PX + Q = 0 \quad (2)$$

une seconde équation.

Si x', x'' sont les racines de la première, on a

$$x' + x'' = -p, \quad x'x'' = q,$$

et, si l'équation (2) a pour racines les carrés des racines de l'équation (1),

$$P = -(x'^2 + x''^2) = 2q - p^2, \quad Q = (x'x'')^2 = q^2.$$

(*) La question est ainsi réduite à mener par le point C une sécante CMN au cercle ABMN, telle que sa partie MN comprise dans l'intérieur du cercle soit égale à une droite donnée. La discussion du problème proposé n'offre que peu d'intérêt et aucune difficulté. (G.)

L'équation (2) devient alors

$$X^2 + (2q - p^2) X + q^2 = 0.$$

Pour qu'elle soit identique à l'équation (1), il faut qu'on ait

$$q^2 = q,$$

d'où

$$q = 1 \text{ ou } q = 0$$

et

$$2q - p^2 = p.$$

Pour $q = 1$, l'égalité $2q - p^2 = p$ devient

$$p^2 + p - 2 = 0,$$

d'où

$$p = 1 \quad \text{ou} \quad p = -2;$$

et pour $q = 0$,

$$p^2 + p = 0,$$

d'où

$$p = 0 \quad \text{ou} \quad p = -1.$$

Si $q = 1$ et $p = 1$, les racines de l'équation (1) sont

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2};$$

chacune d'elles est le carré de l'autre.

Si $q = 1$ et $p = -2$, les deux racines sont égales à l'unité.

Pour $q = 0$, $p = 0$, les deux racines se réduisent à 0.

Quand $q = 0$ et $p = -1$ les racines sont 0 et 1.

Lorsque les racines de l'équation

$$(2) \qquad X^2 + PX + Q = 0$$

sont les inverses des racines de l'équation

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

on a

$$P = -\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) = -\left(\frac{x' + x''}{x'x''}\right) = \frac{p}{q}$$

et

$$Q = \frac{1}{x'x''} = \frac{1}{q},$$

et l'équation (2) devient

$$X^2 + \frac{p}{q}X + \frac{1}{q} = 0, \quad \text{ou} \quad qX^2 + pX + 1 = 0.$$

On arrive aussi à cette dernière équation en remplaçant x par $\frac{1}{X}$, dans l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par M. Wisselink.

RHÉTORIQUE

(p. 88).

SOLUTION DE M. WISSELINK.

Une sphère est posée sur un plan horizontal; sur le même plan repose par sa base un cône droit dont la hauteur est égale au diamètre de la sphère : on demande de couper ces deux corps par un plan horizontal, de telle sorte que les sections soient entre elles comme deux nombres donnés.

Soient R et r les rayons de la sphère et de la base du cône; m, n les deux nombres donnés; x la distance du sommet du cône au plan sécant. Les sections faites dans la sphère et le cône par ce plan auront respectivement les valeurs

$$\pi x(2R - x), \quad \frac{\pi r^2 x^2}{4R^2},$$

dont le rapport est

$$\frac{4(2R - x)R^2}{r^2 x}.$$

L'inconnue x sera déterminée par l'équation

$$\frac{4(2R - x)R^2}{r^2 x} = \frac{m}{n},$$

qui donne

$$x = \frac{8nR^3}{4nR^2 + mr^2}.$$

Pour $m = n$, on a

$$x = \frac{8R^3}{4R^2 + r^2};$$

et pour $m = n$ et $R = r$, on a

$$x = \frac{8}{5}R.$$

Note. — Même solution de M. Moret-Blanc.

TROISIÈME

(p. 89).

SOLUTION DE M. WISSELINK.

I. *Inscrire dans un cercle un triangle* ABC, *dont l'angle* A *est connu, et dont les deux côtés* AC *et* BC *sont tangents à deux cercles donnés.*

L'angle A étant connu, on peut déterminer immédiatement la grandeur du côté BC, et la distance de ce côté au centre O du cercle dans lequel il faut inscrire le triangle ABC. La droite BC sera tangente à la circonférence décrite du point O comme centre, avec un rayon égal à la distance de ce point au côté BC. Or, d'après l'énoncé de la question proposée, la même droite BC est tangente à une autre circonférence donnée; il s'ensuit que BC est une tangente commune à deux circonférences déterminées. Ce qui donne, en général, quatre directions différentes au côté BC. Pour déterminer le troi-

sième sommet A du triangle correspondant à chacune des quatre positions de la base BC, il restera à mener, par le point C, des tangentes à celui des deux cercles donnés que le côté AC doit toucher.

Il faut observer toutefois que, dans un triangle résultant de cette construction, l'angle A peut être le supplément de l'angle donné.

II. *Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction périodique simple de* un, deux *ou* quatre *chiffres.*

On sait que, pour déterminer les valeurs des dénominateurs n, des fractions $\frac{1}{n}$ dont la réduction en décimales donne des fractions périodiques simples de *un*, *deux* ou *quatre* chiffres, il faut d'abord chercher les nombres n qui divisent exactement

$$10 - 1,\ 10^2 - 1,\ 10^4 - 1.$$

On en conclura, d'après des théorèmes bien connus, que *les valeurs des dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en décimales, donnent naissance à des fractions décimales périodiques simples de* un, deux *ou* quatre *chiffres,* sont respectivement :

3, 9;
11, 33, 99;
101, 3.101, 9.101, 11.101, 33.101, 33.3.101.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

La vie et les travaux de Jean Hévelius, par L.-C. Beziat.

Scritti inediti di FRANCESCO MAUROLICO, pubblicati dal Prof. FEDERICO NAPOLI.

Extraits du *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.*

Rome, Imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, via Lata, num° 211 A; 1876.

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Doucet, professeur au Lycée de Saint-Étienne.* — Je vous envoie une solution du problème de Mathématiques élémentaires proposé cette année, au concours général des lycées de province. Cette solution m'a été donnée, le jour même, par M. *Touren,* élève de ma classe au lycée de *Saint-Étienne.*

On donne une circonférence, une droite fixe LL′, *et deux points fixes* A *et* A′ *sur la circonférence. On joint un point quelconque* M *de la courbe aux deux points* A *et* A′; *les droites* MA, MA′ *rencontrent la droite fixe en deux points* P et P′. *Démontrer qu'il existe sur* LL′ *deux points fixes* I et I′, *tels que le produit* $\mathrm{IP} \times \mathrm{I'P'}$ *demeure constant, lorsque le point* M *se meut sur la circonférence. Déterminer les positions des points* I *et* I′.

Si la proposition est vraie, on déterminera facilement I et I′. Lorsque le point P s'éloigne à l'infini, $\mathrm{I'P'} = 0$; traçons donc la corde AB parallèle à LL′ et joignons son extrémité B au point A′. Le point I′ est l'intersection de BA′ avec LL′. Traçons de même A′C parallèle à LL′, et joignons l'extrémité C au point A; AC coupe en I la droite LL′.

Il ne s'agit plus que de *vérifier* la constance du produit

$IP \times I'P'$. Or les triangles AIP, A'I'P' sont semblables; en effet, leurs angles I et I' sont égaux à l'angle constant M, et l'angle P du premier est égal à l'angle A' du second, comme ayant même mesure, le demi-arc BM. On a donc

$$\frac{IP}{A'I'} = \frac{AI}{I'P'}, \quad \text{d'où } IP \times I'P' = AI \times A'I' = \text{const.}$$

Les points I et I' sont construits.

Note. — M. A. Burtaire, professeur de Mathématiques élémentaires à Épinal, nous a adressé une démonstration peu différente de celle qui précède.

2. M. *A. C.* nous communique l'énoncé de la question suivante donnée en composition, dans l'Académie d'Aix, à la classe de Mathématiques élémentaires. — *Étant donnés deux points fixes* A, B, *et une droite* AX, *partant de l'un d'eux* A, *on considère sur cette droite tous les couples de points* m, m', *tels que* $Am \times Am'$ *ait une valeur constante* m^2.

On construit les deux points n, n' tels que $Bm \times Bn$ et $Bm' \times Bn'$ aient une valeur donnée n^2, et l'on demande :

1° De prouver que toutes les droites nn' concourent, quelles que soient les positions de m, m' sur AX, en un point c qu'on propose de déterminer;

2° Comment varie, avec la position de m, le produit $cn \times cn'$;

3° Comment se déplace le point c quand la droite AX tourne autour du point A, de toutes les manières possibles;

4° Ce que seront, l'une par rapport à l'autre, les figures décrites par n et n', si m décrit une sphère donnée;

5° Que deviendraient les résultats si la quantité m était égale à AB.

Le journal scolaire de l'Algérie contient une solution complète de cette question, rédigée par M. *Combe,* professeur de Mathématiques au collége de Constantine.

3. Nous avons reçu de M. *Z. Benoît,* professeur d'Hydrographie à Narbonne, plusieurs Notes relatives à la Géométrie élémentaire et à la Trigonométrie, dans lesquelles l'auteur s'est proposé de simplifier les solutions de plusieurs questions connues : *Construire un triangle dont on connaît les trois hauteurs. Déterminer le rayon d'un cercle inaccessible. Problème du billard circulaire. Connaissant deux cordes parallèles d'un cercle et leur distance, trouver le rayon ;* etc.

Toutes les solutions de M. Benoît sont très-simples et rigoureuses.

Note. — M. Jules Freson, élève de première scientifique à l'Athénée de Liége, nous a adressé une solution de la question 1201, déjà résolue dans le numéro du mois dernier ; et M. Jacob, des solutions des questions 1197 et 1198.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1208

(voir p. 240);

PAR MM. L. PORTAIL ET EUG. BIARD,
Élèves au lycée de Lille.

Trouver le lieu géométrique des foyers des paraboles doublement tangentes à une hyperbole équilatère, de manière que les axes de ces paraboles conservent une direction constante donnée. Lieu des sommets des mêmes paraboles. (GAMBEY.)

Prenons pour origine le centre de l'hyperbole et pour

axes de coordonnées deux diamètres conjugués de cette courbe, dont l'un OX soit parallèle à la direction donnée. Soit θ l'angle des axes.

L'équation de l'hyperbole est $x^2 - y^2 = a^2$ (*), et l'équation d'une conique doublement tangente à cette hyperbole est

$$x^2 - y^2 - a^2 - (mx + ny + p)^2 = 0.$$

Exprimons que cette dernière équation représente une parabole dont l'axe est parallèle à OX. Les termes du second degré se réduisent au terme en y^2; on a les relations suivantes :

$$1 - m^2 = 0, \quad 2mn = 0, \quad \text{et par suite} \quad n = 0.$$

L'équation de la parabole se réduit à

$$(1). \qquad y^2 + 2mpx + a^2 + p^2 = 0.$$

Soient α, β les coordonnées du foyer. C'est le point d'intersection des tangentes menées à la conique des points circulaires à l'infini. Exprimons que ces tangentes forment un cercle évanouissant. Leur équation est

$$(y^2 + 2mpx + a^2 + p^2)(\beta^2 + 2mp\alpha + a^2 + p^2)$$
$$- [\beta y + mp(x + \alpha) + a^2 + p^2]^2 = 0.$$

En égalant entre eux les coefficients de x^2, y^2 et le coefficient du rectangle des variables, divisé par $2\cos\theta$, on a les relations

$$2mp\alpha + a^2 + p^2 = -m^2p^2 = -\frac{mp\beta}{\cos\theta}.$$

On en déduit, puisque $m^2 = 1$, et que p n'est pas nul,

$$p = \frac{m\beta}{\cos\theta},$$

(*) En admettant que l'axe OX rencontre la courbe en des points réels.

d'où

$$\frac{2\beta^2}{\cos^2\theta} + \frac{2\alpha\beta}{\cos\theta} + a^2 = 0.$$

Telle est l'équation du lieu, où α et β représentent les coordonnées courantes. Ce lieu est une hyperbole de même centre que l'hyperbole donnée ; l'une de ses asymptotes est l'axe OX ; l'autre asymptote, qui a pour équation $\beta + \alpha\cos\theta = 0$, est perpendiculaire à l'axe des y (*).

Lieu des sommets. — Prenons les mêmes axes de coordonnées. L'équation de la parabole est

(1) $$y^2 + 2mpx + a^2 + p^2 = 0 = f(x,y),$$

avec la relation

(2) $$m^2 = 1.$$

Le diamètre des cordes perpendiculaires à OX, c'est-à-dire l'axe de la parabole, a pour équation

$$f'_x - \frac{1}{\cos\theta} f'_y = 0,$$

(*) La construction géométrique du foyer d'une parabole satisfaisant aux conditions du problème proposé conduit bien simplement à l'équation $\frac{2y^2}{\cos^2\theta} + \frac{2xy}{\cos\theta} + a^2 = 0$, et montre, de plus, que la distance du foyer à la droite OX augmente sans limite lorsque la corde des contacts s'éloigne indéfiniment du centre de l'hyperbole donnée. Le minimum de cette distance est $\frac{a.\sin 2\theta}{2}$. De sorte que les foyers des paraboles dont il s'agit, *doublement tangentes à l'hyperbole équilatère, en des points réels*, appartiennent aux branches de l'hyperbole représentée par l'équation $\frac{2y^2}{\cos^2\theta} + \frac{2xy}{\cos\theta} + a^2 = 0$, qui ont pour asymptote la perpendiculaire à l'axe des y menée par l'origine des coordonnées.

Lorsque la droite OX ne rencontre pas l'hyperbole équilatère en des points réels, l'équation du lieu cherché est $\frac{2y^2}{\cos^2\theta} + \frac{2xy}{\cos\theta} - a^2 = 0$.

(G.)

ou

$$(3) \qquad mp - \frac{y}{\cos\theta} = 0.$$

L'élimination de m et de p, entre les équations (1), (2), (3), donne immédiatement

$$y^2 + \frac{2xy}{\cos\theta} + a^2 + \frac{y^2}{\cos^2\theta} = 0,$$

$$y^2(1 + \cos^2\theta) + 2xy\cos\theta + a^2\cos^2\theta = 0,$$

équation qui représente aussi une hyperbole concentrique à l'hyperbole donnée, et dont les asymptotes sont l'une OX, et l'autre la droite qui a pour équation

$$y(1 + \cos^2\theta) + 2x\cos\theta = 0.$$

Cas particulier. — Si la direction donnée est celle de l'un des axes de l'hyperbole, c'est cet axe qui est, à la fois, le lieu géométrique des foyers et des sommets.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Moret-Blanc; Bourguet; Chadu; Trantmann; Édouard Guillet et F. Tailhan, maitres répétiteurs au lycée de Moulins; Berthomieu, du lycée de Bordeaux; Paul Souverain, du lycée de Moulins; Eugène Maurial, du lycée d'Angers (classe de M. Boucher).

Question 1211

(voir p. 288);

Par M. Édouard GUILLET,
Maître-répétiteur au lycée de Moulins.

On donne sur un plan un point fixe P; *un cercle* O *et un point* A *sur la circonférence de ce cercle. Une circonférence* O', *variable, passe constamment par le point* A, *et son centre est situé sur la circonférence* O; *déterminer l'enveloppe des polaires du point* P, *par rapport à* O'. (Laisant.)

Je prends pour axe de coordonnées deux diamètres rectangulaires du cercle O, l'axe des x passant par le point fixe A. L'équation du cercle O est

(1) $$x^2+y^2-r^2=0.$$

Soient α, β les coordonnées d'un point quelconque O′ de la circonférence de ce cercle, on aura

(2) $$\alpha^2+\beta^2-r^2=0.$$

Le cercle O′ dont le centre est le point (α, β), et qui passe en A, a pour équation

(3) $$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+2\alpha r-r^2=0.$$

Si p et q sont les coordonnées du point fixe P, la polaire de ce point, par rapport au cercle O′, a pour équation

(4) $$\alpha(x+p-2r)+\beta(y+q)-(px+qy-r^2)=0.$$

Je prends la dérivée de cette dernière équation par rapport à α, en y considérant β comme une fonction de α, définie par l'équation (2). J'obtiens ainsi l'équation

(5) $$\alpha(y+q)-\beta(x+p-2r)=0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il suffit d'éliminer α et β entre les équations (2), (4) et (5), ce qui donne

$$\begin{gathered}(p^2-r^2)x^2+2pqxy+(q^2-r^2)y^2\\ -4r^2(p-r)x-4qr^2y-(p^2+q^2)r^2+4pr^3-3r^4=0.\end{gathered}$$

On voit que le lieu cherché est une hyperbole, ou une ellipse, ou une parabole, suivant qu'on a

$$p^2+q^2-r^2>0, <0, \text{ ou } =0.$$

Dans le premier cas, le point P est extérieur au cercle

fixe O; dans le second, il est intérieur, et dans le dernier cas, il appartient à la circonférence de ce cercle.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Chadu; Louis Goulin; Paul Souverain; Leloutre et Portail.

M. Moret-Blanc a donné une solution géométrique de la question proposée et l'a généralisée en substituant au cercle fixe une conique quelconque.

Question 1212

(voir p. 288);

PAR M. H. BARTHE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

Par les différents points m d'une ellipse on mène des normales à la courbe, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point m, des segments mM, mM', *égaux au demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m; démontrer que les lieux géométriques des points* M, M' *sont deux circonférences concentriques à l'ellipse, dont les rayons sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de la courbe.*

(JOSEPH BRUNO.)

Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées du point m; ρ le demi-diamètre conjugué de celui qui passe en m.

L'équation de la normale est

$$y - b\sin\varphi = \frac{a\sin\varphi}{b\cos\varphi}(x - a\cos\varphi);$$

d'où

$$\frac{y - b\sin\varphi}{a\sin\varphi} = \frac{x - a\cos\varphi}{b\cos\varphi} = \frac{\sqrt{(y - b\sin\varphi)^2 + (x - a\cos\varphi)^2}}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Mais on a

$$\rho^2 + a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a^2 + b^2,$$

d'où

$$\rho^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

De plus, en désignant par x, y les coordonnées d'un point du lieu,

$$\sqrt{(y - b\sin\varphi)^2 + (x - a\cos\varphi)^2} = \rho;$$

on a donc

$$\frac{y - b\sin\varphi}{a\sin\varphi} = \pm 1 \quad \text{et} \quad \frac{x - a\cos\varphi}{b\cos\varphi} = \pm 1.$$

L'élimination de φ se fait immédiatement.

Le signe $+$ donne

$$x^2 + y^2 = (a + b)^2,$$

et le signe $-$ donne

$$x^2 + y^2 = (a - b)^2.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Chadu; Lez; Sondat; Édouard Guillet; Louis Goulin; Paul Souverain; Berthomieu; Ch. Brunot, élève au lycée de Dijon; Leloutre et Portail; Augustin, du lycée de Tours (classe de M. Pellet); Albert Devos, du lycée de Lille; Vincent Fiore, à Naples.

MM. Moret-Blanc, Berthomieu, Albert Devos et Fiore ont démontré la proposition énoncée, au moyen de calculs très-simples fondés sur les relations qui existent entre les axes et les diamètres conjugués de l'ellipse.

M. Ch. Brunot remarque :

1° Que les lieux géométriques des points M, M′ sont les mêmes que ceux des points tels que les distances mM, mM′ soient égales à la moyenne géométrique entre les rayons vecteurs Fm, F′m du point m.

C'est qu'effectivement cette moyenne géométrique est égale au rayon conjugué du rayon mené au point m; proposition qui, sans être nouvelle, peut encore être rappelée quand l'occasion s'en présente.

2° Qu'on trouve encore les mêmes lieux, en prenant mM, mM′ égales à la moyenne géométrique entre les segments déterminés sur chaque normale par les axes de l'ellipse.

Cela revient à dire que la moyenne géométrique entre les deux segments de la normale est égale à celle des deux rayons vecteurs menés au pied de la normale. Ce qui est une proposition connue. (G.)

Question 1213

(voir p. 288);

Par M. Charles RICHARD,
Élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Marseille.

Soient A, B, C, D, E *les sommets consécutifs d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle, et* M *un point quelconque de l'arc* AE : *démontrer géométriquement que*

$$MB + MD = MA + MC + ME.$$

(Burtaire.)

Je prends à partir du point M, sur les cordes MB, MD, des longueurs MA′, ME′, respectivement égales aux cordes MA, ME, et je mène les droites AA′, EE′ qui rencontrent la circonférence, l'une en P, l'autre en Q, et se coupent en I (*).

L'angle AMA′ au sommet du triangle isoscèle MAA′ valant $\frac{2}{5}$ d'angle droit, l'angle MA′A, à la base de ce triangle, vaut $\frac{4}{5}$ d'angle droit, ainsi que l'angle DMB, d'où il résulte que la droite AP est parallèle à MD. On démontrerait de même que la droite EQ est parallèle à MB.

On conclut facilement de ce qui précède que les deux quadrilatères A′BQI, E′DPI sont des parallélogrammes, et par suite l'égalité à démontrer peut s'écrire

$$(E'I + IQ) + (A'I + IP) = E'I + MC + A'I;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

d'où

$$IQ + IP = MC.$$

Or les deux cordes MC, EQ sont égales; en effet, elles sous-tendent des arcs respectivement égaux à

$$MA + AB + BC, \quad \text{et} \quad QC + CD + DE.$$

Mais l'arc MA, différence de AE, ME, est égal à l'arc QC, différence des arcs BC, BQ; en outre, les quatre arcs AB, BC, CD, DE sont égaux entre eux, d'après l'hypothèse; donc les cordes MC, EQ sont égales, et la relation à démontrer devient

$$IQ + IP = EQ, \quad \text{ou bien} \quad IP = IE.$$

Or l'angle PIQ, qui a pour mesure la demi-somme des arcs AE, PQ, étant égal à BMD, vaut $\frac{2}{5}$ d'angle droit, et comme l'arc AE est $\frac{1}{5}$ de la circonférence, il en est nécessairement de même de l'arc PQ; donc les angles EPI, PEI du triangle EIP sont égaux, et par conséquent les côtés IP, EI de ce triangle sont, de même, égaux entre eux. Le théorème est donc démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; Chadu; H. Barthe, élève en Mathématiques spéciales, au lycée de Poitiers; Ch. Cochez; Ch. Richard; Augustin, du lycée de Tours; Léonce Cléry, élève en Mathématiques élémentaires, au lycée d'Annecy; E. Carpentier, du lycée de Lille; Vincent Fiore, à Naples.

M. Chadu généralise ainsi la proposition : « Soit un polygone régulier de $2n+1$ côtés, inscrit dans un cercle; si l_1, l_2, ..., l_{2n+1} sont les droites menées d'un point quelconque de l'arc $(1, 2n+1)$, aux sommets du polygone, on a $l_1 + l_3 + \ldots + l_{2n+1} = l_2 + l_4 + \ldots + l_{2n}$.

Cette proposition générale mérite d'être remarquée; la démonstration que M. Chadu en a donnée est très-simple. (G).

MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION D'UNE VARIABLE ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR CAUCHY (*).

Considérations générales.

Euler et Bezout ont reconnu que, dans l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques, la multiplication peut être substituée à la division. Il y a plus : ces auteurs ont exposé trois méthodes remarquables d'élimination, toutes trois indépendantes de la division algébrique.

Une première méthode d'élimination, qui se trouve exposée par Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* dès l'année 1748, et qui, au jugement d'Euler, pourrait être attribuée à Newton lui-même, consiste à remplacer deux équations algébriques d'un même degré n par deux équations algébriques du degré immédiatement inférieur $n-1$. Si, avec un auteur anglais, M. Sylvester, on nomme *équations dérivées* toutes celles qui se déduisent du système des deux équations données, les deux nouvelles équations seront deux dérivées du degré $n-1$, savoir celles qu'on obtient lorsque l'on combine entre elles, par voie de soustraction, les deux équations algébriques données, après avoir multiplié chacune d'elles par le premier et par le dernier des coefficients que renferme l'autre.

(*) Sur la demande de plusieurs professeurs, nous reproduisons ce Mémoire, emprunté aux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de l'illustre géomètre.

Cette première méthode est d'ailleurs applicable au cas même où les degrés des équations algébriques données sont inégaux, attendu qu'une équation d'un degré inférieur à n peut être considérée comme une équation du degré n, dans laquelle les coefficients de quelques termes se réduisent à zéro.

Suivant une seconde méthode, donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler, dans les *Mémoires de l'Académie de* 1764, pour éliminer une inconnue x entre deux équations algébriques données dont les degrés sont n et m, il suffit de combiner ces équations entre elles par voie d'addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynômes dont le premier soit du degré $m - 1$, le second du degré $n - 1$; puis de choisir les coefficients de ces polynômes de manière à faire disparaître dans l'équation résultante toutes les puissances de x. L'élimination de x entre les deux équations algébriques données se réduit donc à l'élimination des coefficients dont nous venons de parler, entre les équations linéaires auxquelles ces mêmes coefficients doivent satisfaire, c'est-à-dire, en d'autres termes, au calcul d'une *fonction alternée*, formée avec les coefficients des deux équations algébriques, et l'on est ainsi conduit immédiatement à la règle d'élimination énoncée par M. Sylvester, dans le numéro 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). La fonction alternée dont il s'agit est, d'ailleurs, comme l'a remarqué M. Richelot, et comme on devait s'y attendre, celle qui se déduit directement de l'élimination des diverses puissances de x entre les équations algébriques données et ces mêmes équations respectivement multipliées par celles de ces puissances dont les degrés sont inférieurs aux nombres m ou n.

En examinant de près les deux méthodes d'élimination que nous venons de rappeler, et les comparant l'une

à l'autre, on reconnaît aisément que la première méthode introduit dans le premier membre de l'équation finale des facteurs qui sont naturellement étrangers à cette même équation. Il n'en est pas de même de la seconde méthode. Mais la fonction alternée, dont celle-ci exige la formation, résultera d'une élimination effectuée entre $m+n$ équations linéaires, m, n étant les degrés des équations algébriques données, et sera par conséquent de l'*ordre* $m+n$, si l'on mesure l'ordre d'une fonction alternée par le nombre des facteurs contenus dans chacun des termes dont elle se compose. D'ailleurs, pour une fonction alternée de l'ordre n, le nombre des termes serait égal au produit

$$1.2.3\ldots n.$$

Donc, pour une fonction alternée de l'ordre $n+m$, le nombre des termes sera représenté généralement par le produit

$$1.2.3\ldots(m+n).$$

Or ce produit devient très-grand pour des valeurs même peu considérables de m et de n. Si, pour fixer les idées, on suppose

$$m=4, \quad n=4,$$

c'est-à-dire, si les équations algébriques données sont l'une et l'autre du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale sera une fonction alternée du huitième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devrait renfermer

$$1.2.3.4.5.6.7.8=40320$$

termes. Il est vrai que sur ces 40320 termes beaucoup s'évanouissent. Mais la recherche des valeurs et surtout des signes des termes qui ne s'évanouissent pas demandera trop d'attention, et le nombre même de ces termes

sera encore trop considérable pour que l'on n'arrive pas sans beaucoup de peine à former la fonction alternée du huitième ordre, qu'il s'agissait d'obtenir.

Comme le nombre des termes d'une fonction alternée décroît très-rapidement avec l'ordre de cette fonction, il est clair que, si le premier membre de l'équation finale peut être représenté par deux fonctions alternées d'ordres différents, formées avec deux systèmes de quantités déterminées, celle de ces deux fonctions qui sera d'un ordre moindre sera aussi généralement la plus facile à calculer. Or, comme Bezout l'a fait voir dans son Mémoire de 1764, le problème de l'élimination d'une inconnue x entre deux équations algébriques données peut être réduit à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse pas le degré de chacune de ces équations, et cette réduction peut être effectuée sans qu'aucun facteur étranger se trouve introduit. C'est même par un procédé très-simple que Bezout réduit généralement l'élimination de x entre deux équations algébriques du degré n, à la formation d'une seule fonction alternée de l'ordre n. Si, pour faciliter les calculs, on dispose en carré les diverses quantités dont cette fonction alternée se compose, les quantités situées sur une diagonale seront les seules qui ne se trouveront pas répétées, et les autres seront deux à deux égales entre elles, deux quantités égales étant toujours placées symétriquement de part et d'autre de la diagonale dont il s'agit. En conséquence l'équation finale, telle que Bezout l'obtient, a pour premier membre une fonction alternée de l'ordre n, formée avec des quantités dont le nombre se trouve représenté simplement par la somme

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par suite aussi le nombre des termes distincts, dont se

compose cette fonction alternée, s'abaisse au-dessous du produit

$$1.2.3\ldots n,$$

plusieurs de ces termes étant égaux deux à deux, et deux termes égaux pouvant être toujours réunis l'un à l'autre, de manière à former un seul terme qui renferme l'un des facteurs numériques

$$2,\ 4,\ 8,\ \ldots.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que les deux équations algébriques données soient du quatrième degré, le premier membre de l'équation finale, obtenue comme on vient de le dire, sera représenté non plus par une fonction alternée du huitième ordre, c'est-à-dire de l'ordre de celles qui renferment généralement 40320 termes, mais par une fonction alternée du quatrième ordre, et qui, en raison de cet ordre, devra renfermer seulement 24 termes. Ajoutons même que ces 24 termes se réduiront à 17, quatorze étant deux à deux égaux entre eux.

Il est encore essentiel d'observer que la fonction alternée dont il s'agit est du genre de celles que l'on obtient quand on élimine diverses variables $x, y, z, \ldots$, entre les diverses dérivées d'une équation homogène du second degré, et par conséquent du genre de celles qui expriment que l'un des demi-axes d'une ellipse ou d'un ellipsoïde devient infini, l'ellipse se transformant alors en une droite, ou l'ellipsoïde en un cylindre.

C'est d'abord aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées, puis ensuite à la méthode abregée de Bezout, que se rapporteront les deux premiers paragraphes de ce Mémoire. Dans le dernier paragraphe, je déduirai d'un théorème donné par Euler une quatrième méthode qui offre de grands avantages, quand les degrés

des équations données ne se réduisent pas à des nombres peu considérables.

§ Ier. — *Méthodes d'élimination de Bezout et d'Euler.*

Soient

$$(1)\qquad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré $m =$ ou $< n$. Suivant la méthode donnée à Paris par Bezout et à Berlin par Euler en l'année 1764, pour éliminer x entre les deux équations données, il suffira de les combiner entre elles par addition, après les avoir respectivement multipliées par deux polynômes

$$u, \quad v,$$

dont le premier soit du degré $m-1$, le second du degré $n-1$, puis de choisir les coefficients de ces polynômes de manière à faire disparaître, dans l'équation résultante, toutes les puissances de x. Supposons, pour fixer les idées, que les fonctions $f(x)$, $F(x)$ soient l'une du troisième degré, l'autre du second, en sorte qu'on ait

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad F(x) = Ax^2 + Bx + C.$$

Alors u, v devront être de la forme

$$u = Px + Q, \quad v = px^2 + qx + r;$$

et, si l'on élimine x entre les deux équations

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

l'équation résultante sera précisément celle qu'on obtiendra, lorsqu'on choisira les coefficients

$$p, \quad q, \quad r, \quad P, \quad Q,$$

de manière à faire disparaître x de la formule

$$(2) \qquad u\,\mathrm{f}(x) + v\,\mathrm{F}(x) = 0,$$

par conséquent de la formule

$$(\mathrm{P}x + \mathrm{Q})\,\mathrm{f}(x) + (px^2 + qx + r)\,\mathrm{F}(x) = 0,$$

que l'on peut encore écrire comme il suit :

$$(3) \qquad \mathrm{P}x\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{Q}\,\mathrm{f}(x) + px^2\,\mathrm{F}(x) + qx\,\mathrm{F}(x) + r\,\mathrm{F}(x) = 0.$$

Les valeurs de

$$p, \quad q, \quad r, \quad \mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}$$

qui remplissent cette condition sont celles qui vérifient les équations linéaires

$$(4) \qquad \begin{cases} a\mathrm{P} + \mathrm{A}p = 0, \\ b\mathrm{P} + a\mathrm{Q} + \mathrm{B}p + \mathrm{A}q = 0, \\ c\mathrm{P} + b\mathrm{Q} + \mathrm{C}p + \mathrm{B}q + \mathrm{A}r = 0, \\ d\mathrm{P} + c\mathrm{Q} + \mathrm{C}q + \mathrm{B}r = 0, \\ d\mathrm{Q} + \mathrm{C}r = 0. \end{cases}$$

Donc, pour obtenir la résultante cherchée, il suffira d'éliminer les coefficients

$$\mathrm{P}, \quad \mathrm{Q}, \quad p, \quad q, \quad r,$$

entre les équations (4), ou, ce qui revient au même, d'égaler à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le tableau

$$(5) \qquad \begin{cases} a, & 0, & \mathrm{A}, & 0, & 0, \\ b, & a, & \mathrm{B}, & \mathrm{A}, & 0, \\ c, & b, & \mathrm{C}, & \mathrm{B}, & \mathrm{A}, \\ d, & c, & 0, & \mathrm{C}, & \mathrm{B}, \\ 0, & d, & 0, & 0, & \mathrm{C}. \end{cases}$$

On arriverait encore aux mêmes conclusions en partant de la formule (3). En effet, choisir les coefficients

P, Q, R, p, q, r, de manière à faire disparaître de cette formule les diverses puissances

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^{m+n-1},$$

de la variable x, c'est éliminer ces puissances des cinq équations

$$(6)\quad x\,\mathrm{f}(x)=0,\quad \mathrm{f}(x)=0,\quad x^2\mathrm{F}(x)=0,\quad x\,\mathrm{F}(x)=0,\quad \mathrm{F}(x)=0,$$

ou

$$(7)\quad \begin{cases} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx & = 0, \\ \quad ax^3 + bx^2 + cx + d & = 0, \\ \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^3 + \mathrm{C}x^2 & = 0, \\ \quad \mathrm{A}x^3 + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}x & = 0, \\ \quad\quad \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}x + \mathrm{C} & = 0. \end{cases}$$

C'est donc égaler à zéro la fonction alternée formée avec les quantités que présente le tableau

$$(8)\quad \begin{cases} a,\ b,\ c,\ d,\ 0, \\ 0,\ a,\ b,\ c,\ d, \\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ 0,\ 0, \\ 0,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C},\ 0, \\ 0,\ 0,\ \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}. \end{cases}$$

Or cette fonction alternée ne différera pas de celle que nous avons déjà mentionnée, attendu que, pour passer du tableau (5) au tableau (8), il suffit de remplacer les lignes horizontales par les lignes verticales, et réciproquement. Ainsi la méthode d'élimination, indiquée à la fois par Bezout et par Euler en 1764, conduit précisément à la règle énoncée par M. Sylvester dans le n° 101 du *Philosophical Magazine* (février 1840). On pourrait même considérer la règle dont il s'agit comme établie par Bezout dans le Mémoire de 1764, page 318. D'ailleurs la considération des équations (6) ou (7), qui subsistent toujours en même temps que les équations (1),

et s'en déduisent immédiatement, fournit de cette règle une démonstration tellement simple, qu'elle peut être introduite sans inconvénient dans les éléments d'Algèbre.

Observons toutefois que l'ordre ou le degré de la fonction alternée, dont cette règle exige la formation, c'est-à-dire le nombre des quantités qui entrent comme facteurs dans chacun des termes dont cette fonction se compose, est toujours égal à la somme $m+n$ des degrés des deux équations données. Cette même somme, diminuée seulement d'une unité, représenterait le nombre des puissances de x qui doivent être éliminées des équations (6) ou d'autres semblables, ainsi que le degré de deux de ces équations. On peut demander s'il ne serait pas possible d'arriver à l'équation résultante, à l'aide de multiplications algébriques, en opérant de manière à ne pas introduire dans le calcul des puissances de x supérieures à celles que renferment les deux équations proposées. Cette dernière condition se trouve effectivement remplie, lorsque l'on se sert pour effectuer l'élimination d'une ancienne méthode indiquée par Euler dès l'année 1748 dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*. Suivant cette ancienne méthode, qu'Euler semble attribuer à Newton dans le Mémoire de 1764, étant données deux équations en x d'un même degré n, par exemple, les deux suivantes

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + gx^2 + hx + k = 0,$$
$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Gx^2 + Hx + K = 0,$$

on commencera par leur substituer deux équations du degré $n-1$, savoir celles que l'on obtient en combinant par voie de soustraction les deux premières, respectivement multipliées l'une par A, l'autre par a, ou l'une par

$\frac{K}{x}$, l'autre par $\frac{h}{x}$. Après avoir ainsi remplacé les deux équations proposées par les deux suivantes :

$$(Ab - aB)x^{n-1} + (Ac - aC)x^{n-2} + \ldots \\ + (Ah - aH)x + Ak - aK = 0,$$

$$(Ak - aK)x^{n-1} + (Bk - bK)x^{n-2} + \ldots \\ + (Gk - gK)x + Hk - hK = 0,$$

on remplacera celles-ci à leur tour, à l'aide d'un semblable procédé, par deux équations du degré $n - 2$; et, en continuant de la sorte, on finira par obtenir une seule équation du degré zéro qui sera la résultante cherchée.

Pour s'assurer que la même méthode reste applicable à l'élimination de la variable x entre deux équations de degrés inégaux n et $m < n$, il suffit d'observer qu'une équation de degré inférieur à n peut être envisagée comme une équation du degré n, dans laquelle les premiers coefficients se réduiraient à zéro.

En examinant les deux formes sous lesquelles peut se présenter l'équation résultante ou finale, suivant que l'on emploie pour l'élimination de x l'une ou l'autre des deux méthodes que nous venons de rappeler, on reconnaîtra que le premier membre de cette équation, considéré comme fonction des coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad A,\ B,\ C,\ \ldots,$$

est, dans le cas où l'on se sert des polynômes multiplicateurs u et v, une fonction du degré $m + n$, et par suite, quand on suppose $m = n$, une fonction du degré $2n$. Au contraire, l'ancienne méthode substitue successivement à deux équations données, dont les premiers membres sont du degré n par rapport à la variable x, et

du premier degré par rapport aux coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad A,\ B,\ C,\ \ldots,$$

des équations diverses dont les premiers membres sont d'abord du degré $n-1$ par rapport à x, et du second degré par rapport aux mêmes coefficients; puis du degré $n-2$ par rapport à x, et du quatrième degré par rapport aux coefficients, etc. Donc l'équation finale, déduite de l'ancienne méthode, sera du degré 2^n par rapport aux coefficients

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\quad A,\ B,\ C,\ \ldots.$$

Donc, lorsque n surpasse 2, l'ancienne méthode introduit dans l'équation finale un facteur étranger dont le degré est

$$2^n - 2n.$$

On trouve dans l'ouvrage d'Euler qui a pour titre : *Introductio in analysin infinitorum*, et mieux encore, dans un Mémoire de M. Gergonne, l'indication de procédés que l'on peut employer pour débarrasser le premier membre de l'équation finale du facteur étranger, ou même pour éviter l'introduction de ce facteur. Mais ces procédés exigent que l'on s'élève graduellement du cas où l'on suppose $n=2$, au cas où l'on suppose $n=3$, puis de ce dernier au cas où l'on suppose $n=4$, etc.; et l'on peut, comme Bezout l'a fait voir, substituer aux deux méthodes d'élimination ci-dessus rappelées une troisième méthode qui, sans introduire aucun facteur étranger dans le premier membre de l'équation finale, réduit la détermination de ce premier membre à la formation d'une fonction alternée dont l'ordre ne surpasse jamais le degré de chacune des équations données.

§ II. — *Méthode abrégée de Bezout.*

Soient toujours

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré $m =$ ou $< n$. On pourra supposer généralement

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$F(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n,$$

un ou plusieurs des coefficients

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots$$

devant être réduits à zéro, dans le cas où l'on aurait $m < n$; et l'équation finale, qui résultera de l'élimination de la variable x entre les formules (1), exprimera simplement la condition à laquelle les coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_n$$

devront satisfaire, pour que les équations (1) soient vérifiées par une seule et même valeur de x. Voyons maintenant comment on devra s'y prendre pour effectuer cette élimination, c'est-à-dire pour éliminer des deux formules

$$(2) \qquad \begin{cases} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0, \end{cases}$$

les puissances de la variable x représentées par les divers termes de la suite

$$x^n, \quad x^{n-1}, \quad \ldots, \quad x.$$

J'observerai d'abord que, pour éliminer x^n entre les équations (2), il suffit de combiner entre elles, par voie

de division, ces deux équations présentées sous les formes

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_lx^l = -(a_{l+1}x^{l+1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n),$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_lx^l = -(b_{l+1}x^{l+1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n),$$

l désignant l'un quelconque des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1.$$

On trouvera ainsi

$$(3)\qquad \frac{a_0x^{n-l} + a_1x^{n-l-1} + \ldots + a_l}{b_0x^{n-l} + b_1x^{n-l-1} + \ldots + b_l} = \frac{a_{l+1}x^{l-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_{l+1}x^{l-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n};$$

puis, en faisant disparaître les dénominateurs,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(a_0x^{n-l} + a_1x^{n-l-1} + \ldots + a_l)\\ &\times(b_{l+1}x^{l-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n)\\ &-(b_0x^{n-l} + b_1x^{n-l-1} + \ldots + b_l)\\ &\times(a_{l+1}x^{l-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = 0. \end{aligned}\right.$$

Si, pour abréger, on désigne par

$$A_{k,l}$$

le coefficient de x^{n-k-1} dans le premier membre de l'équation (4), on aura non-seulement, quels que soient k et l,

$$(5)\qquad A_{k,l} = A_{l,k},$$

mais encore, pour $k < l$,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{0,l} = a_0b_{l+1} - b_0a_{l+1},\\ &A_{1,l} = a_1b_{l+1} - b_1a_{l+1} + A_{0,l+1},\\ &A_{2,l} = a_2b_{l+1} - b_2a_{l+1} + A_{1,l+1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

et l'équation (4) deviendra

$$(7)\qquad A_{0,l}x^{n-1} + A_{1,l}x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,l}x + A_{n-1,l} = 0.$$

Si, dans cette dernière équation, de laquelle la $n^{\text{ième}}$ puissance de x se trouve effectivement éliminée, on attribue successivement à l les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2,\ n-1,$$

on obtiendra le système des formules

$$(8)\quad \begin{cases} A_{0,0}\,x^{n-1} + A_{1,0}\,x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,0}\,x + A_{n-1,0} = 0, \\ A_{0,1}\,x^{n-1} + A_{1,1}\,x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,1}\,x + A_{n-1,0} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{0,n-2}\,x^{n-1} + A_{1,n-1}\,x^{n-2} + \ldots + A_{n-2,n-1}\,x + A_{n-1,n-1} = 0, \end{cases}$$

dont la première et la dernière sont précisément celles que l'on emploie dans l'ancienne méthode d'élimination dont nous avons déjà parlé (p. 393). Cela posé, il est clair que l'on pourra éliminer d'un seul coup, entre les équations (8), les puissances de x représentées par les divers termes de la progression géométrique

$$x^{n-1},\quad x^{n-2},\quad \ldots,\quad x^2,\quad x.$$

L'équation finale, résultant de cette élimination, sera de la forme

$$(9)\qquad S = 0,$$

S étant la fonction alternée de l'ordre n, formée avec les quantités que renferme le tableau

$$(10)\quad \begin{cases} A_{0,0}, & A_{0,1}, & \ldots, & A_{0,n-2}, & A_{0,n-1}, \\ A_{0,1}, & A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,n-2}, & A_{1,n-1}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ A_{0,n-2}, & A_{1,n-2}, & \ldots, & A_{n-2,n-2}, & A_{n-2,n-1}, \\ A_{0,n-1}, & A_{1,n-1}, & \ldots, & A_{n-2,n-1}, & A_{n-1,n-1}. \end{cases}$$

C'est en effet ce que l'on conclura immédiatement des équations (8) jointes à la formule (5).

La méthode abrégée d'élimination que nous venons de

rappeler ne diffère pas au fond de celle que Bezout a indiquée dans le Mémoire de 1764, p. 319.

Il est facile de voir quel sera le degré de la quantité $\mathcal{S}$, déterminée par cette méthode, et considérée comme fonction des coefficients

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_n.$$

En effet, chaque terme de $\mathcal{S}$ renfermant n facteurs de la forme $A_{k,l}$, et chacun de ces facteurs étant du second degré, en vertu des équations (6), $\mathcal{S}$ ou le premier membre de l'équation finale sera nécessairement du degré $2n$, tout comme dans le cas où l'on applique la règle énoncée par M. Sylvester. Il y a plus; on peut déjà pressentir la réalité d'une assertion qui sera plus tard changée en certitude, savoir que la valeur de $\mathcal{S}$, fournie par la méthode abrégée, coïncide, au signe près, avec celle que fournirait la règle dont il s'agit. Effectivement, d'après cette règle, lorsqu'on suppose $m = n$, le premier membre de l'équation finale renferme une seule fois le terme

$$a_0^n \, b_n^n.$$

Or ce même terme, pris avec son signe ou avec un signe contraire, se retrouve encore une seule fois dans la fonction alternée $\pm \mathcal{S}$ formée à l'aide du tableau (10), savoir dans la partie de $\pm \mathcal{S}$ qui est représentée par le produit

$$A_{0,n-1} A_{1,n-2} \ldots A_{1,n-2} A_{0,n-1},$$

et même dans la partie de ce produit qui, en vertu des formules

$$\begin{aligned}
A_{1,n-2} &= a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\
A_{2,n-3} &= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + A_{1,n-2}, \\
&= a_2 b_{n-2} - b_2 a_{n-2} + a_1 b_{n-1} - b_1 a_{n-1} + A_{0,n-1}, \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

se réduit simplement à la puissance

$$A^n_{0,n-1} = (a_0 b_n - a_n b_0)^n.$$

Il importe d'observer que, dans le carré figuré par le tableau (6), les termes de la forme

$$A_{l,l}$$

se trouvent tous situés sur une même diagonale, et que les autres termes sont égaux deux à deux, les termes égaux étant placés symétriquement par rapport à la diagonale dont il s'agit. Cette propriété du tableau (6) est une conséquence immédiate de la formule (5), et entraîne à son tour la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation finale* (9), *qui résulte de l'élimination de x entre les équations* (2), *est aussi celle que l'on obtiendrait en éliminant n variables*

$$x,\ y,\ z,\ \ldots$$

entre les diverses dérivées d'une équation du second degré

(11) $$s = 0,$$

dans laquelle on aurait

(12) $$\left\{\begin{aligned} s = {} & A_{0,0}x^2 + A_{1,1}y^2 + A_{2,2}z^2 + \ldots \\ & + 2A_{0,1}xy + 2A_{0,2}xz + \ldots + 2A_{1,2}yz + \ldots \end{aligned}\right.$$

L'équation (9) est donc celle que l'on obtiendrait en assujettissant les variables $x, y, z, \ldots$ à la condition

(13) $$s = \text{const.},$$

et cherchant la relation qui doit exister entre les coefficients

$$A_{0,0},\quad A_{0,1},\quad A_{0,2},\quad \ldots,\quad A_{1,1},\quad A_{1,2},\quad \ldots,\quad A_{2,2},\quad \ldots,$$

pour qu'une valeur maximum ou minimum de la fonction r, déterminée par la formule

$$(14) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots},$$

devienne infinie.

§ III. — *Usage des fonctions symétriques dans la théorie de l'élimination.*

Dans les paragraphes précédents, nous avons rappelé trois méthodes d'élimination, et, quoique deux de ces méthodes n'introduisent dans l'équation finale aucun facteur étranger, toutes deux, même la plus concise, la méthode abrégée de Bezout, deviennent à peu près impraticables, lorsque les degrés des équations données s'élèvent au delà du cinquième ou du sixième, à moins que l'on n'ait recours, pour la formation des fonctions alternées, à des artifices de calcul qui permettent, comme nous l'expliquerons dans un autre Mémoire, d'évaluer ces fonctions sans calculer séparément chacun de leurs termes. De semblables artifices ne deviennent point nécessaires lorsqu'on fait servir à l'élimination une quatrième méthode fondée sur un théorème d'Euler et sur la considération des fonctions symétriques. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Soient toujours

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad F(x) = 0$$

deux équations algébriques, la première du degré n, la seconde du degré m; et supposons, pour plus de commodité, les coefficients des plus hautes puissances de x, dans ces mêmes équations, réduits à l'unité, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$f(x) = x^n + l x^{n-1} + \ldots + p x + q,$$
$$F(x) = x^m + L x^{m-1} + \ldots + P x + Q.$$

Enfin désignons respectivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \ldots$$

et par

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu, \quad \ldots$$

les racines de la première et de la seconde des équations (1), de sorte qu'on ait encore

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots, \\ F(x) &= (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\ldots. \end{aligned}$$

Pour que les équations (1) subsistent simultanément, ou, en d'autres termes, soient vérifiées par une même valeur de x, il sera nécessaire et il suffira que les coefficients

$$l, \ \ldots, \ p, \ q, \quad L, \ \ldots, \ P, \ Q$$

soient liés entre eux, de manière que les racines

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots, \quad \lambda, \ \mu, \ \nu, \ \ldots$$

satisfassent à l'une des conditions

$$\begin{array}{llll} \alpha=\lambda, & \alpha=\mu, & \alpha=\nu, & \ldots, \\ \beta=\lambda, & \beta=\mu, & \beta=\nu, & \ldots, \\ \gamma=\lambda, & \gamma=\mu, & \gamma=\nu, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \ldots, \end{array}$$

par conséquent à la condition

$$\text{(2)} \qquad S=0,$$

la valeur de S étant

$$S=(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots \\ \times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots.$$

Donc, si l'on adopte cette valeur de S, l'équation (2) devra s'accorder, ou même coïncider, avec l'équation finale que produirait l'élimination de x entre les équations (1) : c'est en cela que consiste le théorème d'Euler.

Il est facile de s'assurer que la valeur de $\mathcal{S}$, déterminée comme on vient de le dire, sera une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q,\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q}.$$

En effet cette valeur se réduit, au signe près, au dernier terme de l'équation qui aurait pour racines les binômes

$$\begin{array}{llll} \alpha-\lambda, & \alpha-\mu, & \alpha-\nu, & \ldots, \\ 6-\lambda, & 6-\mu, & 6-\nu, & \ldots, \\ \gamma-\lambda, & \gamma-\mu, & \gamma-\nu, & \ldots. \end{array}$$

Donc elle sera une fonction entière des quantités de la forme

$$\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2,\ \ldots,\ \mathcal{S}_{mn},$$

si l'on pose généralement

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{S}_i = & (\alpha-\lambda)^i + (\alpha-\mu)^i + (\alpha-\nu)^i + \ldots \\ & + (6-\lambda)^i + (6-\mu)^i + (6-\nu)^i + \ldots \\ & + (\gamma-\lambda)^i + (\gamma-\mu)^i + (\gamma-\nu)^i + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

D'ailleurs, en développant les puissances de binômes renfermées dans la formule (3), et posant, pour abréger,

$$s_i = \alpha^i + 6^i + \gamma^i + \ldots,\quad \mathrm{S}_i = \lambda^i + \mu^i + \nu^i + \ldots,$$

on tirera généralement de cette formule

$$(4)\quad \mathcal{S}_i = s_i \mathrm{S}_0 - \frac{i}{1} s_{i-1} \mathrm{S}_1 + \frac{i(i-1)}{1.2} s_{i-2} \mathrm{S}_2 - \ldots \pm s_0 \mathrm{S}_i.$$

Donc, puisque, en vertu de formules connues, s_i, $\mathcal{S}_i$ peuvent être exprimés en fonctions entières des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q,\quad \mathrm{L},\ \ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},$$

on pourra en dire autant de $\mathcal{S}_i$, et par suite de $\mathcal{S}$.

La série d'opérations que nous venons d'indiquer, en prouvant que le premier membre de l'équation (2) peut

être réduit à une fonction entière des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

fournit de plus un moyen d'effectuer cette réduction, et constitue par conséquent une méthode d'élimination de la variable x entre les équations (1). D'ailleurs la formule (4), qui, dans cette méthode, se trouve combinée avec d'autres formules déjà connues, comprend comme cas particulier une formule analogue, à l'aide de laquelle, dans son *Traité de la résolution des équations numériques,* Lagrange passe d'une équation donnée à une autre qui a pour racines les carrés des différences entre les racines de la première.

Observons encore que, en vertu des deux équations identiques

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots,$$
$$F(x) = (x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)\ldots,$$

la formule

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} S = \;&(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots \\ &\times(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots \\ &\times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots \end{aligned} \right.$$

peut être réduite, comme Euler l'a remarqué, à l'une quelconque des deux suivantes :

$$(6)\qquad S = F(\alpha)F(\beta)F(\gamma)\ldots,$$

$$(7)\qquad S = (-1)^{mn} f(\lambda)f(\mu)f(\nu)\ldots.$$

Or, pour transformer l'une quelconque de ces deux dernières valeurs de S, la première, par exemple, en une fonction entière des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

il suffit de suivre ou la marche indiquée par Euler dans

les *Mémoires de Berlin* de 1748, ou mieux encore celle que j'ai indiquée moi-même dans un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824, et de convertir d'abord le produit

$$\begin{aligned}&F(\alpha)F(6)F(\gamma)\ldots\\&\quad=(\alpha^m+L\alpha^{m-1}+\ldots+P\alpha+Q)(6^m+L6^{m-1}+\ldots+P6+Q)\ldots\end{aligned}$$

en une fonction entière des sommes de la forme

$$\begin{aligned}&(\alpha^m+L\alpha^{m-1}+\ldots+P\alpha+Q)^i+\ldots\\&+(6^m+L6^{m-1}+\ldots+P6+Q)^i+\ldots,\end{aligned}$$

puis chacune de ces sommes, moyennant le développement des puissances des polynômes, en une fonction entière de

$$s_0,\quad s_1,\quad \ldots,\quad s_{mi}.$$

Le premier membre de l'équation (2), transformé comme on vient de le dire, en une fonction entière des coefficients

$$l,\ \ldots,\ p,\ q,\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q,$$

ne renfermera-t-il aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté lui-même par une fonction entière de ces coefficients, quelles que soient les valeurs qu'on leur attribue? On lèvera facilement tous les doutes que l'on pourrait conserver à cet égard en s'appuyant sur la proposition suivante :

Théorème I. — *Les coefficients*

$$l,\ \ldots,\ p,\ q,\quad L,\ \ldots,\ P,\ Q$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres, la fonction entière de ces coefficients qui représentera la valeur du produit

$$\begin{aligned}S=\ &(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots\\&\times(6-\lambda)(6-\mu)(6-\nu)\ldots\\&\times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,\end{aligned}$$

formé avec les différences entre les racines de la première et de la seconde des équations (1), *ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs, représentés tous deux par des fonctions entières de ces mêmes coefficients.*

Démonstration. — En effet, supposons généralement

$$8 = 8' 8'',$$

$8'$, $8''$ désignant, s'il est possible, deux fonctions entières de

$$l, \ldots, p, q, \quad \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}.$$

En vertu des relations qui existent entre les coefficients des équations (1) et leurs racines, on pourra exprimer

$$8', \ 8''$$

en fonctions entières de

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

et alors on aura identiquement

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} 8' 8'' = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)\ldots(\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu)\ldots \\ \qquad \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)\ldots. \end{array} \right.$$

Cette dernière équation, devant subsister indépendamment des valeurs attribuées aux racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

se vérifiera encore, lorsqu'on établira entre ces racines des relations quelconques, par exemple, lorsqu'on supposera

$$\alpha = \lambda.$$

Mais alors, le second membre de l'équation (8) étant nul, le premier devra l'être aussi; donc, en prenant $\alpha = \lambda$, on fera évanouir le produit $8' 8''$, et par suite l'un

des facteurs S', S''. Concevons, pour fixer les idées, que ce soit le premier facteur S' qui s'évanouisse, en vertu de la supposition

$$\alpha = \lambda.$$

S', considéré comme fonction de α, sera divisible algébriquement par $\alpha - \lambda$. D'autre part, S' pouvant être regardé comme une fonction entière, non-seulement des coefficients

$$l, \ldots, p, q,$$

mais encore des coefficients

$$\mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q},$$

sera par suite une fonction symétrique, non-seulement des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$$

mais encore des racines

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots$$

Donc S', algébriquement divisible par le binôme

$$\alpha - \lambda,$$

aura pour facteur non-seulement ce binôme, mais encore tous ceux que l'on en déduit en remplaçant la racine α par l'une quelconque des autres racines β, $\gamma, \ldots$ de l'équation $\mathrm{f}(x) = 0$, et la racine λ par l'une quelconque des autres racines μ, $\nu, \ldots$ de l'équation $\mathrm{F}(x) = 0$. Observons maintenant que, en vertu de l'équation (8), le produit

$$S' S'',$$

considéré comme une fonction des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

sera une fonction du degré mn. Donc mn représentera la

somme des degrés des facteurs

$$S' \quad \text{et} \quad S''$$

considérés comme fonctions de ces mêmes racines. Mais, d'après ce qu'on vient de voir, le facteur S', c'est-à-dire celui des facteurs S', S'' qui s'évanouit quand on suppose

$$\alpha = \lambda,$$

sera divisible algébriquement par chacun des binômes que renferme le second membre de l'équation (8). Donc, puisque ces binômes sont généralement distincts et indépendants les uns des autres, S' sera divisible par le produit de tous ces binômes, dont le nombre est mn, et, si l'on considère S' comme une fonction des racines

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots, \quad \lambda, \ \mu, \ \nu, \ \ldots,$$

le degré de S' ne pourra généralement s'abaisser au-dessous de mn. Donc le degré de l'autre facteur S'' ne pourra s'élever au-dessus de zéro ; et cet autre facteur ne pourra être qu'un facteur numérique, indépendant des racines des équations (1), et, par conséquent, des coefficients que renferment ces équations. Donc, tant qu'aucune relation particulière ne se trouve établie entre les coefficients

$$l, \ \ldots, \ p, \ q; \quad L, \ \ldots, \ P, \ Q,$$

ou, ce qui revient au même, entre les racines

$$\alpha, \ \beta, \ \gamma, \ \ldots, \quad \lambda, \ \mu, \ \nu, \ \ldots,$$

il est impossible de décomposer la fonction S en deux facteurs qui soient l'un et l'autre des fonctions entières de

$$l, \ \ldots, \ p, \ q, \quad L, \ \ldots, \ P, \ Q.$$

Corollaire I. — Si, contrairement à l'énoncé du théorème, les coefficients

$$l, \ \ldots, \ p, \ q, \quad L, \ \ldots, \ P, \ Q$$

devaient satisfaire à certaines conditions particulières, si, par exemple, quelques-uns de ces coefficients se réduisaient à zéro, la valeur de $\mathcal{S}$, considérée comme fonction des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

pourrait devenir décomposable en facteurs représentés par deux fonctions entières de ces mêmes coefficients.

Corollaire II. — Supposons, pour fixer les idées, les équations (1) réduites aux deux équations du second degré

$$(9) \qquad x^2 + px + q = 0, \quad x^2 + Px + Q = 0,$$

on aura

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathcal{S} = (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(6 - \lambda)(6 - \mu) \\ \quad = (\alpha^2 + P\alpha + Q)(6^2 + P6 + Q), \end{cases}$$

et, par suite, eu égard aux formules

$$\alpha^2 + p\alpha + q = 0, \quad 6^2 + p6 + q = 0,$$
$$\alpha + 6 = -p, \quad \alpha 6 = q,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= [Q - q + (P - p)\alpha][Q - q + (P - p)6] \\ &= (Q - q)^2 + (P - p)[(Q - q)(\alpha + 6) + (P - p)\alpha 6], \end{aligned}$$

ou plus simplement

$$(11) \qquad \mathcal{S} = (Q - q)^2 + (P - p)(Pq - pQ).$$

Or, tant que les coefficients

$$p, q, P, Q$$

ne seront assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, alors, conformément au théorème établi, la valeur précédente de $\mathcal{S}$ ne pourra être décomposée en deux facteurs représentés tous deux par des fonctions

entières de ces coefficients. Mais le même théorème pourra ne plus subsister dans le cas contraire; et si, par exemple, on annule deux des coefficients, en posant

$$p = 0, \quad P = 0,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on réduit les équations proposées aux deux suivantes :

$$(12) \qquad x^2 + q = 0, \quad x^2 + Q = 0,$$

alors la valeur de S, déterminée par la formule

$$(13) \qquad S = (Q - q)^2,$$

sera décomposable en deux facteurs égaux à $Q - q$, ou, ce qui revient au même, en deux facteurs dont chacun sera une fonction entière des coefficients q, Q. Alors aussi, pour éliminer x entre les deux équations proposées, il suffira de retrancher l'une de l'autre; et l'équation finale ainsi obtenue, savoir

$$Q - q = 0,$$

offrira un premier membre équivalent, non plus à la fonction S, mais seulement à sa racine carrée. Il est au reste facile de voir comment il arrive que la démonstration cidessus exposée du théorème en question devient, dans ce cas, inadmissible. En effet, lorsque p, P s'évanouissent, les formules

$$\alpha + \beta = p, \quad \lambda + \mu = P,$$

donnent

$$\beta = -\alpha, \quad \mu = -\lambda.$$

On a donc alors

$$\beta - \lambda = -(\alpha - \mu), \quad \beta - \mu = -(\alpha - \lambda);$$

et, par suite, pour qu'une fonction des racines

$$\alpha, \beta, \lambda, \mu$$

soit alors algébriquement divisible par chacun des quatre binômes

$$\alpha - \lambda, \quad \alpha - \mu, \quad \beta - \lambda, \quad \beta - \mu,$$

il suffit qu'elle soit algébriquement divisible par les deux premiers.

Corollaire III. — Lorsque, dans les équations (1), les coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre de la formule (2) ne peut renfermer aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière des coefficients dont il s'agit, puisqu'il est alors impossible de décomposer ce premier membre en deux facteurs, dont chacun soit une fonction entière de ces mêmes coefficients.

Il est facile de trouver à quel degré s'élève S considéré soit comme fonction des coefficients

$$l, \ldots, p, q,$$

soit comme fonction des coefficients

$$L, \ldots, P, Q.$$

En effet, S pouvant être représenté par une fonction entière de tous les coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

le degré de cette fonction, par rapport aux seuls coefficients

$$L, \ldots, P, Q,$$

ne variera pas, si l'on exprime, comme on peut le faire, les coefficients

$$l, \ldots, p, q$$

à l'aide des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$$

Mais alors la valeur obtenue de $\mathcal{S}$ devra coïncider, quels que soient L,..., P, Q et α, 6, γ,..., avec celle que fournit l'équation (6); en sorte qu'on aura identiquement

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{S} = &(\alpha^m + \mathrm{L}\alpha^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}\alpha + \mathrm{Q}) \\ &\times (6^m + \mathrm{L}6^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}6 + \mathrm{Q}) \ldots \end{aligned} \right.$$

Donc, $\mathcal{S}$ étant le produit de n facteurs, dont chacun sera du premier degré par rapport aux coefficients

$$\mathrm{L}, \ \ldots, \ \mathrm{P}, \ \mathrm{Q},$$

le degré de $\mathcal{S}$ par rapport à ces mêmes coefficients sera précisément le nombre n.

On conclura de même de l'équation (7) que le degré de $\mathcal{S}$ par rapport aux coefficients

$$l, \ \ldots, \ p, \ q$$

est précisément le nombre m.

On peut être curieux de connaître généralement la partie de la fonction $\mathcal{S}$ qui dépendra uniquement des termes constants des équations (1), c'est-à-dire des coefficients q et Q. Or cette partie sera évidemment ce que deviendra la fonction $\mathcal{S}$, quand on supposera tous les autres coefficients

$$l, \ \ldots, \ p, \ \mathrm{L}, \ \ldots, \ \mathrm{P}$$

réduits à zéro. D'ailleurs, dans cette supposition, les équations (1) deviendront

$$(15)\qquad x^n + q = 0, \quad x^m + \mathrm{Q} = 0,$$

et, en conséquence, la formule (14) donnera

$$(16)\qquad \mathcal{S} = (\alpha^m + \mathrm{Q})(6^m + \mathrm{Q})(\gamma^m + \mathrm{Q})\ldots$$

Il y a plus, les rapports

$$\frac{\alpha}{\alpha}, \quad \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \ldots$$

étant respectivement égaux aux diverses racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

les $m^{\text{ièmes}}$ puissances de ces rapports, ou les fractions

$$\frac{\alpha^m}{\alpha^m}, \quad \frac{\beta^m}{\alpha^m}, \quad \frac{\gamma^m}{\alpha^m}, \quad \ldots,$$

seront respectivement égales aux diverses racines de l'équation

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1,$$

si l'on appelle ω le plus grand commun diviseur des nombres

$$m, \ n,$$

et, par suite, respectivement égales aux divers termes de la progression géométrique

$$1, \ \theta, \ \theta^2, \ \ldots, \ \theta^{n-1},$$

si l'on nomme θ une racine primitive de l'équation

$$x^{\frac{n}{\omega}} = 1.$$

Cela posé, la formule (16) donnera

$$S = \left[(Q + \alpha^m)(Q + \theta\alpha^m)\ldots(Q + \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\alpha^m)\right]^{\omega},$$

et, comme on aura identiquement

$$x^{\frac{n}{\omega}} - 1 = (x-1)(x-\theta)(x-\theta^2)\ldots\left(x-\theta^{\frac{n}{\omega}-1}\right),$$

on en conclura, en remplaçant x par $-\frac{Q}{\alpha^m}$,

$$(Q + \alpha^m)(Q + \theta\alpha^m)\ldots\left(Q + \theta^{\frac{n}{\omega}-1}\alpha^m\right)$$
$$= Q^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{n}{\omega}}\alpha^{\frac{mn}{\omega}} = Q^{\frac{n}{\omega}} - (-1)^{\frac{m+n}{\omega}} q^{\frac{n}{\omega}};$$

puis, eu égard à cette dernière formule, on trouvera définitivement

$$(17)\qquad S = (-1)^n\left[(-Q)^{\frac{n}{\omega}} - (-q)^{\frac{m}{\omega}}\right]^{\omega}.$$

Jusqu'ici, pour plus de simplicité, nous avons supposé que, dans les équations (1), les coefficients des plus hautes puissances de x se réduisaient à l'unité. Admettons maintenant la supposition contraire, en sorte qu'on ait, par exemple,

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k,$$
$$F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx + K.$$

Pour ramener les équations (1) à la forme précédemment adoptée, il suffira de diviser la première par a, la seconde par A ; par conséquent, il suffira de prendre

$$l = \frac{a}{b},\quad \ldots,\quad p = \frac{h}{a},\quad q = \frac{k}{a},$$
$$L = \frac{B}{A},\quad \ldots,\quad P = \frac{H}{A},\quad Q = \frac{K}{A}.$$

Cela posé, comme la valeur de S fournie par chacune des équations (5), (14) sera du degré m relativement aux quantités

$$l = \frac{b}{a},\quad \ldots,\quad p = \frac{h}{a},\quad q = \frac{k}{a},$$

et du degré n relativement aux quantités

$$L = \frac{B}{A},\quad \ldots,\quad P = \frac{H}{A},\quad Q = \frac{K}{A};$$

comme d'ailleurs, dans cette valeur de $\mathcal{S}$, la partie qui dépendra uniquement des coefficients q, Q se réduira, en vertu de la formule (17), à

$$(-1)^n\left[\left(-\frac{K}{A}\right)^{\frac{n}{\omega}}-\left(-\frac{k}{a}\right)^{\frac{m}{\omega}}\right]^\omega,$$

il est clair que, pour transformer cette même valeur de $\mathcal{S}$ en une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k,\ A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

il sera nécessaire et suffisant de la multiplier par le produit

$$a^m A^n.$$

Or, dans la fonction entière ainsi obtenue, la partie qui dépendra des seuls coefficients

$$a,\quad A,\quad k,\quad K$$

sera évidemment

$$(-1)^n\left[a^{\frac{m}{\omega}}(-K)^{\frac{n}{\omega}}-A^{\frac{n}{\omega}}(-k)^{\frac{m}{\omega}}\right]^\omega.$$

De cette remarque, jointe au théorème I, on déduira aisément la proposition suivante :

Théorème II. — *Les coefficients*

$$a,\ b,\ \ldots,\ h,\ k,\ A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K$$

étant supposés quelconques et indépendants les uns des autres dans les deux équations algébriques

$$(18)\qquad \begin{cases} ax^n+bx^{n-1}+\ldots+hx+k=0,\\ Ax^m+Ax^{m-1}+\ldots+Hx+K=0,\end{cases}$$

et les racines de ces équations étant respectivement

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$
$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \ldots,$$

si l'on prend

$$(19)\quad \begin{cases} S = a^m A^n (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)\ldots \\ \qquad \times (6 - \lambda)(6 - \mu)(6 - \nu)\ldots(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)\ldots, \end{cases}$$

alors S *sera une fonction entière des coefficients*

$$a, b, \ldots, h, k, \quad A, B, \ldots, H, K,$$

qui ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés tous deux par d'autres fonctions entières de ces mêmes coefficients.

(*A continuer.*)

SUR L'ATTRACTION DES ELLIPSOÏDES HOMOGÈNES;

Par M. G. ZOLOTAREFF,
Professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Legendre, dans son Mémoire *Sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes,* a donné deux équations linéaires entre les projections de l'attraction suivant la loi de la nature qu'exerce l'ellipsoïde sur un point intérieur.

Les projections de cette attraction sur les axes de l'ellipsoïde s'expriment, comme on sait, par des intégrales elliptiques de la première et de la seconde espèce.

Soient :

A, B, C ces projections;
a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde;
f, g, h les coordonnées du point attiré;
M la masse de l'ellipsoïde;
ρ sa densité.

Cela posé, les deux relations mentionnées sont

$$\frac{A}{f}+\frac{B}{g}+\frac{C}{h}=4\pi p,$$

$$\frac{Aa^2}{f}+\frac{Bb^2}{g}+\frac{Cc^2}{h}=\frac{3M}{n}F(k,\varphi),$$

$$n^2=c^2-a^2,\quad m^2=b^2-a^2,\quad k^2=1-\frac{m^2}{n^2},\quad \cos\varphi=\frac{a}{c},$$

$$a<b<c,$$

$F(k, \varphi)$ désignant une intégrale elliptique de la première espèce.

Dans cette Note, je fais connaître une troisième relation

$$\frac{Aa^2(b^2+c^2)}{f}+\frac{Bb^2(a^2+c^2)}{g}+\frac{Cc^2(a^2+b^2)}{h}=\frac{3Mabc}{\sigma^4}\frac{S}{\pi},$$

$2S$ désignant la surface de l'ellipsoïde dont les axes sont

$$2\alpha=\frac{2\sigma^2}{a},\quad 2\beta=\frac{2\sigma^2}{b},\quad 2\gamma=\frac{2\sigma^2}{c},$$

et σ ayant une valeur arbitraire. On voit, d'après les équations écrites ci-dessus, que l'intégrale de la seconde espèce n'entre dans les projections A, B, C que sous la forme de la surface de l'ellipsoïde.

I. Rappelons d'abord l'expression de la surface de l'ellipsoïde.

Soient α', β', γ' les angles que fait la normale au point (x, y, z) de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

avec les trois axes des coordonnées rectangulaires. On a les formules connues

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad \cos\beta' = \frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

d'où il vient

$$\frac{x^2}{a^4\cos^2\alpha'} = \frac{y^2}{b^4\cos^2\beta'} = \frac{z^2}{c^4\cos^2\gamma'}$$

$$= \frac{1}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'};$$

par conséquent le carré de la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées s'exprime comme il suit :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^4\cos^2\alpha' + b^4\cos^2\beta' + c^4\cos^2\gamma'}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma'}.$$

Désignons encore par λ, μ les expressions

$$\lambda = \frac{b^2\sin^2\alpha'}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha'}}, \quad \mu = \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + c^2\sin^2\alpha}}.$$

Une partie connue de la surface de l'ellipsoïde s'exprime, comme on sait, par une intégrale

$$\int_0^{\alpha'} \frac{\pi\, d\alpha'\,(\lambda\mu)}{\cos\alpha'} = \frac{\pi\lambda\mu}{\cos\alpha'} - \pi\int_0^{\alpha'} \frac{\lambda\mu\sin\alpha'\, d\alpha'}{\cos^2\alpha'}.$$

Mais on voit aisément que

$$\int_0^{\alpha'} \frac{b^2 c^2 \sin^3\alpha'\, d\alpha'}{\cos^2\alpha' \sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}$$
$$= \frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'}$$
$$- a^2 - \int_0^{\alpha'} \frac{[(b^2 + c^2 - a^2)a^2\cos^2\alpha' + c^2 b^2\sin^2\alpha']\, d\alpha' \sin\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Donc, en désignant par S′ la surface dont il s'agit, on aura

$$S' = \frac{\pi b^2 c^2 \sin^2\alpha'}{\cos\alpha' \sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}$$
$$- \pi \frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'} + \pi a^2$$
$$+ \pi \int_0^{\alpha'} \frac{[(b^2 + c^2 - a^2)a^2\cos^2\alpha' + c^2 b^2\sin^2\alpha']\sin\alpha'\, d\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha' + c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Cela posé, je reprends l'expression

$$r^2 = \frac{a^4\cos^2\alpha' + b^4\cos^2\beta' + c^4\cos^2\gamma'}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma}.$$

En faisant

$$\cos\beta' = \cos\theta\sin\alpha',$$
$$\cos\gamma' = \sin\theta\sin\alpha',$$

je considère une intégrale double

$$\int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\alpha'\, d\alpha'\, d\theta.$$

En ayant égard à ce que

$$r^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2(a^2 - b^2 - c^2)\cos^2\alpha' - b^2 c^2\sin^2\alpha'}{a^2\cos^2\alpha' + b^2\sin^2\alpha'\cos^2\theta + c^2\sin^2\alpha'\sin^2\theta},$$

on trouve

$$\int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(b^2+c^2)(1-\cos\alpha')$$
$$+ 2\pi\int_0^{\alpha'} \frac{[a^2(a^2-b^2-c^2)\cos^2\alpha' - b^2c^2\sin^2\alpha']\sin\alpha'\, d\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}.$$

Donc

$$2S' + \int_0^{\alpha'}\int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(a^2+b^2+c^2)$$
$$+ \frac{2\pi}{\cos\alpha'}\,\frac{b^2c^2\sin^2\alpha'}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')}}$$
$$- 2\pi\frac{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha'+b^2\sin^2\alpha')(a^2\cos^2\alpha'+c^2\sin^2\alpha')}}{\cos\alpha'}$$
$$- 2\pi(b^2+c^2)\cos\alpha'.$$

En faisant $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$2S + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2 \sin\alpha'\, d\alpha'\, d\theta = 2\pi(a^2+b^2+c^2),$$

S désignant la moitié de la surface de l'ellipsoïde.

Soient s et t les demi-axes de la section de l'ellipsoïde par un plan passant par son centre et conjugué à la direction de r. On a

$$r^2 + s^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Il en résulte

$$(1) \qquad 2S = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} (s^2+t^2)\sin^2\alpha'\, d\alpha'\, d\theta.$$

II. Les composantes de l'attraction suivant les axes

de l'ellipsoïde sont

$$A = 8\rho f b^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta}{\Omega},$$

$$B = 8\rho g a^2 c^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \cos^2\theta \, d\varphi \, d\theta}{\Omega},$$

$$C = 8\rho h a^2 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\varphi \sin^2\theta \, d\varphi \, d\theta}{\Omega},$$

Ω désignant une quantité

$$b^2 c^2 \cos^2\varphi + a^2 c^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + b^2 a^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta.$$

Il suit de ces formules que

$$\left[\frac{A}{f} a^2(b^2 + c^2) + \frac{B}{g} b^2(a^2 + c^2) + \frac{C}{h} c^2(a^2 + b^2)\right] \frac{\sigma^4 \pi}{6 M abc}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\begin{array}{c} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta \\ + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta \end{array}\right]}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta,$$

α, β, γ désignant ici les quantités

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{a}, \quad \beta = \frac{\sigma^2}{b}, \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{c}.$$

D'ailleurs, on sait que l'expression

$$\frac{\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

représente la somme des carrés des demi-axes de la section de l'ellipsoïde

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

par le plan, mené par le centre perpendiculairement au rayon vecteur, déterminé par les deux angles φ et θ.

En désignant maintenant par S la surface de l'ellipsoïde (2), on aura, en vertu de la formule (1),

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\begin{array}{c}\left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\cos^2\varphi + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\varphi\cos^2\theta \\ + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta\end{array}\right]}{\frac{1}{\beta^2\gamma^2}\cos^2\varphi + \frac{1}{\alpha\gamma^2}\sin^2\varphi\cos^2\theta + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sin^2\varphi\sin^2\theta} \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Donc

$$\frac{A}{f} a^2(b^2 + c^2) + \frac{B}{g} b^2(a^2 + c^2) + \frac{C}{h} c^2(a^2 + b^2) = \frac{3 M abc}{\sigma^4} \frac{S}{\pi}.$$

C. Q. F. D.

SUR LA SÉRIE DE LAGRANGE;

Par M. G. ZOLOTAREFF,
Professeur à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Soit

$$(1) \qquad z = a + x\varphi(z)$$

une équation entre les variables x et z, et $F(z)$ une fonction qu'il faut développer en série ordonnée suivant les puissances croissantes de x.

A cet effet, je considère une intégrale définie

$$S_n = \int_a^z [x\varphi(u) + a - u]^n F'(u)\, du.$$

En la différentiant par rapport au paramètre a, on aura

$$\frac{dS_n}{da} = nS_{n-1} - x^n \varphi^n(a) F'(a);$$

il en résulte, en posant

$$n = 1, 2, \ldots, n,$$

les formules suivantes :

$$(1) \qquad S_0 = x\varphi(a) F'(a) + \frac{dS_1}{da},$$

$$(2) \qquad 2S_1 = x^2\varphi^2(a) F'(a) + \frac{d^2S_1}{da^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(n) \qquad nS_{n-1} = x^n\varphi^n(a) F'(a) + \frac{dS_n}{da}.$$

Remplaçant maintenant dans la première équation S_1 par sa valeur tirée de la deuxième, puis S_2 par sa valeur tirée de la troisième équation, etc., on aura enfin

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} S_0 &= x\varphi(a) F'(a) + \frac{x^2}{1.2} \frac{d[\varphi(a) F'(a)]}{da} \\ &\quad + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{d^2[\varphi^2(a) F'(a)]}{da^2} + \ldots + R_n, \end{aligned} \right.$$

R_n désignant, pour abréger, la quantité

$$(\alpha') \quad \frac{1}{1.2.3\ldots n} \frac{d^n}{da^n} \left\{ \int_a^z [x\varphi(u) + a - u]^n F'(u) du \right\}.$$

En ayant égard à ce que

$$S_0 = F(z) - F(a),$$

on voit que la formule (α) présente la série de Lagrange avec le terme complémentaire R_n.

La formule (α') pour le terme complémentaire est due à M. Popoff.

COMPOSITIONS ÉCRITES DONNÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1876.

Concours d'admissibilité.

Composition de Mathématiques.

Première question. — Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$, pour la surface représentée par l'équation

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

Nota. — L'explication doit être faite sur les données numériques qui ont été indiquées et non avec des relations générales littérales, faute de quoi la composition serait considérée comme nulle et non avenue.

Seconde question. — On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

Tracé graphique.

Tore traversé par un trou conique.

Données. — La ligne de terre à 13 centimètres au-dessous de la tête imprimée. Tore : axe dans le milieu de la feuille $O'\omega = 55^{mm}$, $O\omega = 125^{mm}$, $O'C' = 70^{mm}$: rayon du cercle méridien $= 50^{mm}$. Cône : cône de révolution dont l'axe est parallèle au plan vertical et rencontre l'axe du tore ; le sommet est en (S, S'), $OS = 27^{mm}$;

le point S′ est sur le cercle, la génératrice $S'a'$ qui forme le contour apparent du cône est tangente au cercle méridien en S, la seconde génératrice de contour apparent $S'b'$ est tangente à l'autre méridien en d'; l'axe est la bissectrice : c'est $S'f'$ qui rencontre l'axe du tore en h'.

On a figuré une sphère ayant son centre en f' et inscrite dans le cône; elle touche le contour apparent $S'a'$ en h'. La projection horizontale est un cercle de rayon égal ayant son centre en f; les deux tangentes menées à ce cercle par le point S forment le contour apparent horizontal du cône.

Construction. — Sphères auxiliaires ayant leurs centres au point k'. L'une est $b'i'a'g'n'm'p'$; elle coupe le tore suivant le parallèle $g'i'$ projeté horizontalement suivant le cercle gf et suivant le parallèle $m'r'$ projeté horizontalement suivant mr; elle coupe le cône suivant les parallèles $a'b'$ et $n'p'$, ce qui détermine les points d'intersection $t'_1\, tt_1$, $u'_1\, uu_1$, $v'_1\, vv_1$. On a tracé la sphère qui donne les points sur le cercle de gorge $x'_1\, xx_1$ et la sphère limite inscrite dans le tore, qui donne le point w' pour lequel la tangente est le parallèle du cône et dont on n'a pas construit la projection horizontale. Les points (d', d), (S', S) sont des points doubles réels; le point de rencontre y' des contours apparents se projette en y.

On a représenté le tore après qu'on en a enlevé la portion contenue dans le cône.

Les constructions faites sur le modèle en pointillé doivent être faites en encre de couleur.

Composition de Physique.

Dilatation linéaire des solides par la méthode de Ramsden.

Lunette de Galilée.

Composition de Chimie.

Préparation et analogies de l'ammoniaque, du phosphure d'hydrogène gazeux et de l'arséniure d'hydrogène.

Analyse de l'ammoniaque.

Concours d'admission.

Composition de Mathématiques.

On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun des cercles on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact avec le cercle variable du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.

Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle, on aura à la rendre rationnelle.

En second lieu, on exprimera en fonction du rayon du cercle les coordonnées du point d'incidence, en s'attachant à spécifier les solutions réelles distinctes.

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis, à l'encre de Chine, d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modelé de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 de-

grés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Calcul trigonométrique.

Étant donnés dans un triangle deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 38540^{m},17,$$
$$b = 29625^{m},43,$$
$$C = 37^{\circ}15'23'',41,$$

trouver les deux autres angles A et B, le troisième côté c et la surface S.

N. B. — Ce calcul n'ayant pas été distribué en même temps à tous les candidats de l'une des séries, à Paris, a été annulé pour ces candidats, et remplacé par le suivant :

Étant donnés, dans un triangle, les trois côtés

$$a = 38502^{m},35,$$
$$b = 29678^{m},49,$$
$$c = 40763^{m},21,$$

calculer les trois angles et la surface.

Composition française.

DE L'INDÉPENDANCE.

L'indépendance absolue est une chimère. L'homme dépend toujours de quelqu'un ou de quelque chose : enfant, de ses parents; homme fait, des lois; employé, fonctionnaire, de ses chefs; malade, de son médecin; plaideur, de ses juges, etc., etc.

Fût-elle réalisable, elle serait funeste : elle détruirait les liens de la société. L'homme ne verrait plus que lui au monde, ne serait plus retenu par aucun frein, etc.

Mais l'esprit d'indépendance est bon, en ce sens qu'il

sauvegarde notre dignité d'êtres libres, qu'il nous préserve de la servitude volontaire et de l'abaissement qui en est la suite.

Composition de Géométrie descriptive.

Représenter par ses projections le solide commun à un cône et à un hyperboloïde qui ont une génératrice commune. Les deux surfaces recouvrent des corps solides.

Ligne de terre à 25 centimètres au-dessus du bord inférieur de la feuille de papier.

Hyperboloïde de révolution : axe vertical au milieu de la feuille; centre en (O, O'), $Oa = 120^{mm}$, $O'a = 70^{mm}$; rayon OD du cercle, trace horizontale de la surface $= 110^{mm}$; rayon OB du cercle de gorge $= 45^{mm}$.

La génératrice ABS, $A'O'S'$ parallèle au plan vertical sera la génératrice commune.

Cône : cône oblique à base circulaire, sa base est dans le plan horizontal; le sommet est en (S, S') sur la génératrice commune, $aS = 180^{mm}$; le centre de la base est en C, $CA = 100^{mm}$, $CS = 120^{mm}$; le cercle de base doit passer par le point A, son rayon est donc égal à 100 millimètres.

Nota. — On ne considérera pour la représentation du solide commun que la nappe du cône située entre le sommet et le plan horizontal, mais on prolongera un peu la courbe d'intersection des deux côtés pour bien montrer sa forme; ces prolongements seront faits en pointillé.

N. B. — Cette composition est celle qui a été annulée pour les candidats de Paris, et remplacée par la suivante :

On donne dans le plan horizontal de projection

un triangle rectangle ABC : $A = 90^\circ$, $AB = 0^m,08$, $AC = 0^m,06$.

Le cercle horizontal ayant A pour centre et AC pour rayon engendre un tore en tournant autour de la parallèle menée par le point B à la droite AC.

On demande de construire l'intersection de ce tore et de la sphère qui, ayant un rayon égal à $0^m,09$, touche le plan horizontal de projection au point I, milieu de BC.

On placera la ligne de terre LT à égale distance du petit côté de la feuille de dessin, et l'on disposera le triangle ABC de manière que AB et LT soient parallèles et à la même distance du point C.

Dans la mise à l'encre, on représentera la sphère supposée pleine et existant seule, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

COMPOSITIONS ÉCRITES DONNÉES A L'ÉCOLE CENTRALE.

CONCOURS D'ADMISSION.

1re SESSION. — 27 ET 28 JUILLET 1876.

1° *Géométrie analytique.*

On donne deux points O et A et l'on considère toutes les paraboles qui ont le point O pour sommet et qui passent au point A. A chacune de ces paraboles, on mène la tangente et la normale au sommet O, et la normale et la tangente au point A. On demande :

1° Le lieu du point de concours des tangentes au sommet O et au point A ;

2° Le lieu du point de concours de la normale au sommet O et de la tangente en A ;

3° Le lieu du point de concours de la tangente au sommet O et de la normale en A;

4° Le lieu du point de concours des normales au sommet O et au point A.

2° *Calcul trigonométrique.*

Calculer les angles et la surface d'un triangle, connaissant les trois côtés :

$$a = 26347,4,$$
$$b = 18341,7,$$
$$c = 27371,9.$$

3° *Épure.*

On donne, dans le plan horizontal de projection, un cercle qui est tangent à la ligne de terre et dont le rayon est égal à $0^m,06$. Ce cercle est la base d'un cône droit dont la hauteur est égale à $0^m,14$.

Soient A le point du cercle qui est le plus éloigné de la ligne de terre, et B le milieu de l'une des deux arêtes du cône qui sont parallèles au plan vertical de projection. La droite AB est parallèle aux génératrices d'un cylindre dont la trace horizontale est le cercle décrit du point A comme centre, avec un rayon égal à $0^m,04$.

On demande :

1° De trouver l'intersection du cône et du cylindre ainsi définis;

2° De représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cylindre.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour déterminer un point de l'intersection et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre à égale distance des petits côtés du cadre.

Titre : *Cône et Cylindre.*

4° *Physique et Chimie.*

I. Un tube barométrique contenant de l'air et du mercure plonge dans une cuvette profonde qui renferme le même liquide. Ce tube, sur une longueur de $0^m,08$, est plus étroit à sa partie supérieure que dans tout le reste de sa longueur; le rapport des rayons des deux parties qui le composent est de 1 à 2. L'air qui se trouve dans ce tube, mesuré sous la pression atmosphérique extérieure de $0^m,75$, occupe exactement le volume de la partie la plus étroite; le mercure est alors de niveau dans le tube et dans la cuvette. On soulève le tube verticalement, jusqu'à ce que la partie la plus large sorte du mercure de $0^m,48$. Une différence de niveau s'établit alors entre les deux surfaces du mercure et l'on demande de calculer cette différence, la pression extérieure étant toujours de $0^m,75$.

II. Préparation de l'hydrogène, de l'hydrogène protocarboné et de l'hydrogène bicarboné.

III. Calculer le poids de l'oxygène nécessaire pour brûler 280 grammes d'hydrogène bicarboné et le volume à zéro et sous la pression de $0^m,76$ de la quantité d'oxygène ainsi employée.

Équivalent	$H = 1$
»	$C = 6$
»	$O = 8$
Poids d'un litre d'air, à zéro et sous la pression $0^m,76$	$1^{gr},293$
Densité de l'oxygène	$\delta = 1,1056$

BIBLIOGRAPHIE.

SALTEL. — *Mémoire sur de nouvelles lois générales qui régissent les surfaces à points singuliers.* Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 2 fr. 50 c.

Parmi les lois que renferme ce travail, l'auteur appelle surtout l'attention des géomètres sur une nouvelle classification des surfaces algébriques. M. Saltel montre que, étant donné *arbitrairement* le degré d'une surface, il existe une ou plusieurs surfaces particulières de ce degré (surfaces qu'il est d'ailleurs toujours très-facile de définir) *dont toutes les propriétés sont rattachées à celles d'une surface d'ordre aussi inférieur que l'on veut* C'est ainsi, par exemple, que, dans les dix premiers degrés, on trouve une *vingtaine* de surfaces particulières dont toutes les propriétés sont rattachées à celles du *plan*, et tout autant dont les propriétés sont rattachées à celles de la surface du *second ordre.*

SALTEL. — *Mélanges de Géométrie supérieure.* — Paris, Gauthier-Villars. — Prix : 1 fr. 50 c.

Ces mélanges comprennent les parties suivantes : 1° *Sur l'extension des trois problèmes fondamentaux de la théorie des séries homographiques ;* 2° *Construction des racines des équations algébriques par les courbes ;* 3° *Nouvelle construction de la courbe du troisième ordre définie par neuf points ;* 4° *Théorèmes sur les surfaces du troisième ordre.*

PUBLICATIONS RÉCENTES.

B. BONCOMPAGNI. — *Intorno ad una proprietà de' numeri dispari.*

MÉMOIRE SUR L'ÉLIMINATION D'UNE VARIABLE ENTRE DEUX ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES ;

PAR CAUCHY.

[SUITE(*).]

Démonstration. — Lorsqu'on suppose

$$(20)\qquad \begin{cases} b = al, \ldots, & h = ap, \quad k = \mathrm{AQ}, \\ \mathrm{B} = \mathrm{AL}, \ldots, & \mathrm{H} = \mathrm{AP}, \quad \mathrm{K} = aq, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(21)\qquad \begin{cases} l = \dfrac{b}{a}, \ldots, & p = \dfrac{h}{a}, \quad q = \dfrac{k}{a}, \\ \mathrm{L} = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}, \ldots, & \mathrm{P} = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}, \quad \mathrm{Q} = \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}, \end{cases}$$

les équations (18) se réduisent aux deux formules

$$(22)\qquad \begin{cases} x^n + lx^{n-1} + \ldots + px + q = 0, \\ x^m + \mathrm{L}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{P}x + \mathrm{Q} = 0 ; \end{cases}$$

et alors, comme il suffit de multiplier par le produit

$$a^m \mathrm{A}^n$$

la valeur de $\mathcal{S}$ que donne l'équation (5), pour obtenir celle que donne l'équation (19), cette dernière se réduit, d'après ce qui a été dit ci-dessus, à une fonction entière des coefficients

$$a, \; b, \ldots, \; h, \; k, \quad \mathrm{A}, \; \mathrm{B}, \ldots, \; \mathrm{H}, \; \mathrm{K}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 385.

J'ajoute que cette fonction entière ne pourra être généralement et algébriquement décomposée en deux facteurs représentés par d'autres fonctions entières des mêmes coefficients. En effet, soient, s'il est possible,

$$8', \quad 8''$$

deux semblables facteurs. En vertu des formules (20), jointes à celles qui serviront à exprimer les coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}$$

des équations (22) en fonction des racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

on pourra considérer les deux facteurs $8'$, $8''$ comme des fonctions entières de ces racines et des deux coefficients

$$a, \mathrm{A}.$$

Cela posé, la formule

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} 8' 8'' = a^m \mathrm{A}^n (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \ldots \\ \times (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \ldots (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \ldots \end{aligned} \right.$$

devant subsister, quelles que soient les valeurs attribuées aux racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

et aux deux coefficients

$$a, \mathrm{A},$$

on prouvera, en raisonnant comme nous l'avons fait pour démontrer le théorème I, qu'un des facteurs $8'$, $8''$, le facteur $8'$ par exemple, est algébriquement divisible par le produit

$$\begin{aligned} (\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu) \ldots (\beta - \lambda)(\beta - \mu)(\beta - \nu) \ldots \\ \times (\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu) \ldots . \end{aligned}$$

Donc, parmi les facteurs simples que renferme le second

membre de la formule (23), les seuls qui pourront entrer dans la composition de $8''$ seront les coefficients

$$a,\ \mathrm{A},$$

dont l'un au moins devra être facteur de $8''$, puisque, dans l'hypothèse admise, $8''$ ne doit pas se réduire à un facteur numérique. Mais, pour que $8''$ pût devenir proportionnel à une puissance entière de l'un des coefficients

$$a,\ \mathrm{A},$$

sans dépendre d'ailleurs, en aucune manière, des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots,$$

par conséquent sans dépendre, en aucune manière, des coefficients

$$l,\ldots,\ p,\ q,\quad \mathrm{L},\ldots,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Q},$$

ou, ce qui revient au même, des coefficients

$$b,\ldots,\ h,\ k,\quad \mathrm{B},\ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{K},$$

il faudrait que chacun des coefficients a, A, ou au moins l'un d'eux, entrât comme facteur algébrique dans la fonction entière des quantités

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ldots,\ \mathrm{H},\ \mathrm{K},$$

à laquelle peut se réduire le second membre de l'équation (23). Or cette condition n'est certainement pas remplie, puisque, dans la fonction entière dont il s'agit, la partie qui dépend uniquement des coefficients

$$a,\ \mathrm{A},\ k,\ \mathrm{K}$$

se réduit à l'expression

$$-1^{n}\left[a^{\frac{m}{\omega}} - \mathrm{K}^{\frac{n}{\omega}} - \mathrm{A}^{\frac{r}{\omega}} - k^{\frac{m}{\omega}}\right],$$

qui n'est algébriquement divisible ni par A, ni par a. Donc l'hypothèse admise ne peut subsister, et le théorème II est exact.

Corollaire. — Puisque, en vertu des formules (20) ou (21), les équations (18) coïncident avec les équations (22), l'équation finale qui résultera de l'élimination de x entre les équations (18) pourra être réduite à la formule

$$\mathcal{S} = 0,$$

la valeur de $\mathcal{S}$ étant déterminée par la formule (5). D'autre part, comme la valeur de $\mathcal{S}$ déterminée par la formule (5) ne peut s'évanouir, sans que la valeur de $\mathcal{S}$ déterminée par la formule (19) s'évanouisse pareillement, l'équation finale dont il s'agit entraînera encore la formule (2), si l'on prend pour $\mathcal{S}$ la fonction des coefficients

$$a,\ b, \ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B, \ldots,\ H,\ K,$$

à laquelle peut se réduire le second membre de la formule (19). J'ajoute qu'alors, si ces coefficients ne sont assujettis à aucune relation, à aucune condition particulière, le premier membre $\mathcal{S}$ de la formule (2) ne renfermera aucun facteur étranger à l'équation finale, et représenté par une fonction entière de ces mêmes coefficients. C'est là, en effet, une conséquence immédiate du théorème II, en vertu duquel il sera impossible de décomposer $\mathcal{S}$ en deux facteurs dont chacun soit une fonction entière des coefficients

$$a,\ b, \ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B, \ldots,\ H,\ K.$$

Puisque la valeur de $\mathcal{S}$ déterminée par la formule (5), c'est-à-dire le produit

$$(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)\ldots(6 - \lambda)(6 - \mu)(6 - \nu)\ldots,$$
$$\times(\gamma - \lambda)(\gamma - \mu)(\gamma - \nu)\ldots,$$

se réduit à une fonction entière des rapports

$$l = \frac{a}{b}, \ldots, \; p = \frac{h}{a}, \; q = \frac{k}{a}, \quad L = \frac{B}{A}, \ldots, \; P = \frac{H}{A}, \; Q = \frac{K}{A},$$

la valeur de S que déterminera la formule (19) ne sera pas seulement, comme on l'a déjà remarqué, une fonction entière des coefficients

$$a, \; b, \ldots, \; h, \; k, \quad A, \; B, \ldots, \; H, \; K;$$

elle sera, de plus, une fonction homogène et du degré m relativement aux coefficients

$$a, \; b, \ldots, \; h, \; k;$$

elle sera encore une fonction homogène et du degré n relativement aux coefficients

$$A, \; B, \ldots, \; H, \; K;$$

donc elle sera, par rapport au système de tous les coefficients

$$a, \; b, \ldots, \; h, \; k, \quad A, \; B, \ldots, \; H, \; K,$$

une fonction entière et homogène du degré $m+n$. Désignons cette même fonction par

$$\varpi(a, \; b, \ldots, \; h, \; k; \quad A, \; B, \ldots, \; H, \; K);$$

on aura identiquement, eu égard aux formules (20),

$$\begin{aligned} &\varpi(a, \; b, \ldots, \; h, \; k; \quad A, \; B, \ldots, \; H, \; K) \\ &= a^m A^n \varpi(1, \; l, \ldots, \; p, \; q; \quad 1, \; L, \ldots, \; P, \; Q), \end{aligned}$$

et l'équation finale résultant de l'élimination de x entre les équations données pourra être présentée sous la forme

$$(24) \qquad \varpi(a, \; b, \ldots, \; h, \; k; \quad A, \; B, \ldots, \; H, \; K) = 0,$$

si les équations données sont les formules (18), ou même

sous la forme

$$(25)\qquad \varpi(1,\ l,\ldots,\ p,\ q;\quad 1,\ L,\ldots,\ P,\ Q)=0,$$

si les équations données sont réduites aux formules (22).

Ajoutons que, le second membre de la formule (19) devant être équivalent au produit

$$a^m A^m \varpi(1,\ l,\ldots,\ p,\ q;\quad 1,\ L,\ldots,\ P,\ Q),$$

les relations subsistant entre les coefficients

$$l,\ldots,\ p,\ q,\quad L,\ldots,\ P,\ Q$$

et les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\quad \lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots$$

devront entraîner la formule

$$\begin{aligned}&\varpi(1,\ l,\ldots,\ p,\ q;\quad 1,\ L,\ldots,\ P,\ Q)\\ &\quad=(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots\\ &\qquad\times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\gamma)\ldots.\end{aligned}$$

On peut vouloir comparer l'équation finale (24) ou (25) à celle qu'on obtiendrait si, à la méthode d'élimination dont nous avons ici fait usage, on en substituait d'autres, par exemple celles qui se trouvent exposées dans les §§ I et II. On établira sans peine, à ce sujet, les propositions suivantes :

Théorème III. — *Lorsque les coefficients*

$$l,\ldots,\ p,\ q,\quad L,\ldots,\ P,\ Q,$$

renfermés dans les équations

$$(22)\qquad \begin{cases} x^n + l x^{n-1} + \ldots + p x + q = 0,\\ x^m + L x^{m-1} + \ldots + P x + Q = 0,\end{cases}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x, demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres,

alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction

$$\varpi(1,\ l,\ldots,\ p,\ q;\quad 1,\ L,\ldots,\ P,\ Q),$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$l,\ldots,\ p,\ q,\quad L,\ldots,\ P,\ Q.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (22), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduits à une équation finale de la forme

$$8 = 0,$$

8 désignant une fonction entière des coefficients

$$l,\ldots,\ p,\ q,\quad L,\ldots,\ P,\ Q.$$

A l'aide des relations qui existent, d'une part, entre les coefficients

$$l,\ldots,\ p,\ q$$

et les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,$$

d'autre part, entre les coefficients

$$L,\ldots,\ P,\ Q$$

et les racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots,$$

on pourra transformer 8 en une fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). D'ailleurs l'équation

$$8 = 0,$$

résultant de l'élimination de x, devra être vérifiée toutes les fois qu'on établira entre ces racines une rela-

tion qui permettra de satisfaire par une même valeur de x à la première et à la seconde des équations (22), par exemple, lorsqu'une des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$$

deviendra égale à l'une des racines

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots$$

Donc la fonction entière des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots,$$

en laquelle pourra se transformer le premier membre $\mathcal{S}$ de l'équation finale

$$\mathcal{S}=0,$$

devra s'évanouir avec chacun des binômes

$$\alpha-\lambda,\ \alpha-\mu,\ \alpha-\nu,\ldots,\ \ \beta-\lambda,\ \beta-\mu,\ \beta-\nu,\ldots,$$
$$\gamma-\lambda,\ \gamma-\mu,\ \gamma-\nu,\ldots,$$

et être algébriquement divisible par leur produit. Donc cette fonction sera de la forme

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{S}=\mathcal{R}(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots \\ \qquad\times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots, \end{array}\right.$$

$\mathcal{R}$ désignant une nouvelle fonction entière des racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,\ \ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ldots,$$

qui, comme la fonction $\mathcal{S}$ et comme le produit

$$(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)\ldots(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)\ldots$$
$$\times(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)\ldots,$$

aura, en vertu de la formule (26), la propriété de rester invariable, tandis qu'on échangera entre elles, ou les racines

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots.$$

ou les racines

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots.$$

En d'autres termes, $\mathcal{R}$ sera une nouvelle fonction entière et symétrique des diverses racines de chacune des équations (22). Par conséquent, dans le second membre de la formule (26), le facteur $\mathcal{R}$ pourra être, aussi bien que le produit de tous les binômes, transformé en une fonction entière des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q.$$

Or, comme, après cette double transformation, la formule (26) donnera

$$(27) \qquad \mathcal{S} = \mathcal{R}\varpi(1, l, \ldots, p, q, \quad 1, L, \ldots, P, Q),$$

il est clair que le premier membre $\mathcal{S}$ de l'équation finale se réduira définitivement, si l'on a

$$\mathcal{R} = 1,$$

à la fonction entière

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q; \quad 1, L, \ldots, P, Q),$$

et, dans le cas contraire, au produit de cette fonction par une fonction entière des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q.$$

Au reste, le dernier cas comprend le premier ; et, lorsque le degré de la fonction entière représentée par $\mathcal{R}$ se réduit à zéro, cette fonction se change en un facteur numérique qui peut être l'unité même.

Corollaire. — La valeur la plus simple que l'on puisse, dans la formule (27), attribuer à la fonction $\mathcal{R}$, étant

$$\mathcal{R} = 1,$$

l'équation (25) offre évidemment la forme la plus simple

à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté par une fonction entière des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

renfermés dans les équations (22).

Théorème IV. — *Lorsque les coefficients*

$$a, b, \ldots, h, k, \quad A, B, \ldots, H, K,$$

renfermés dans les équations

$$(18) \qquad \begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + \ldots + hx + k = 0, \\ Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + Hx + K = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles on se propose d'éliminer la variable x, demeurent arbitraires et indépendants les uns des autres, alors toute fonction entière de ces coefficients, propre à représenter le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, se réduit nécessairement à la fonction

$$\varpi(a, b, \ldots, h, k, \quad A, B, \ldots, H, K),$$

ou au produit de celle-ci par une autre fonction entière des coefficients

$$a, b, \ldots, h, k, \quad A, B, \ldots, H, K.$$

Démonstration. — En effet, supposons que l'élimination de x entre les équations (18), étant effectuée par une méthode quelconque, nous ait conduits à une équation finale de la forme

$$S = 0,$$

S désignant une fonction entière des coefficients

$$a, b, \ldots, h, k, \quad A, B, \ldots, H, K.$$

On réduira les équations (18) aux équations (22), en posant

$$b = al, \ldots, \quad h = ap, \quad k = aq, \quad B = AL, \ldots, \quad H = AP, \quad K = AQ;$$

et, à l'aide de ces dernières formules jointes aux relations qui existent d'une part entre les coefficients

$$l, \ldots, p, q$$

et les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$$

d'autre part entre les coefficients

$$L, \ldots, P, Q$$

et les racines

$$\lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

on pourra transformer $\mathcal{S}$ en une fonction entière de toutes les racines

$$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \quad \lambda, \mu, \nu, \ldots,$$

et des deux coefficients

$$a, A.$$

Il y a plus : la valeur de $\mathcal{S}$, que l'on obtiendra ainsi, devant être une fonction symétrique des racines de chacune des équations (22), on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la démonstration du théorème III, que cette valeur de $\mathcal{S}$ peut être représentée par un produit de la forme

$$\mathcal{R}\varpi(1, l, \ldots, p, q; \quad 1, L, \ldots, P, Q),$$

$\mathcal{R}$ désignant une fonction entière, non plus seulement des coefficients

$$l, \ldots, p, q, \quad L, \ldots, P, Q,$$

mais aussi des deux coefficients

$$a, A.$$

Comme on aura d'ailleurs identiquement

$$\varpi(1, l, \ldots, p, q, 1, L, \ldots, P, Q) = \frac{\varpi(a, b, \ldots, h, k, A, B, \ldots, H, K)}{a^m A^m},$$

la valeur transformée de S ne différera pas de celle que donne la formule

$$(28) \quad S = \frac{\mathfrak{R}}{a^m A^m} \varpi(a, b, \ldots, h, k; A, B, \ldots, H, K).$$

Soit maintenant

$$\Theta = \frac{\mathfrak{R}}{a^m A^m}$$

ce que deviendra la fraction

$$\frac{\mathfrak{R}}{a^m A^m}$$

quand on y remplacera les quantités

$$l, \ldots, p, q, L, \ldots, P, Q$$

par les rapports équivalents

$$\frac{b}{a}, \ldots, \frac{h}{a}, \frac{k}{a}, \frac{B}{A}, \ldots, \frac{H}{A}, \frac{K}{A}.$$

Θ ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a, b, \ldots, h, k, A, B, \ldots, H, K,$$

divisée ou non divisée par certaines puissances entières et positives des questions a, A; et, si l'on considère S comme une fonction entière des mêmes coefficients

$$a, b, \ldots, h, k, A, B, \ldots, H, K,$$

la formule (28) donnera identiquement, c'est-à-dire, quelles que soient les valeurs attribuées aux coefficients

dont il s'agit,

$$(29)\quad S = \Theta\varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K).$$

D'autre part, la fonction

$$\varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K),$$

qui, en vertu du théorème II, n'est algébriquement divisible ni par a, ni par A, ne pourra s'évanouir ni avec a, ni avec A. Donc la fonction

$$\Theta = \frac{S}{\varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K)},$$

exprimée à l'aide des seuls coefficients

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K,$$

ne pourra devenir infinie pour une valeur nulle de a ou de A ; donc cette fonction n'admettra point de diviseurs représentés par des puissances entières et positives des quantités a, A, et ne pourra être qu'une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K.$$

Si le degré de cette fonction entière se réduit à zéro, elle se transformera en un facteur numérique qui pourra être l'unité même, et alors la valeur de S, fournie par l'équation (29), se réduira au premier membre de la formule (24).

Corollaire I. — La valeur la plus simple que l'on puisse, dans la formule (29), attribuer à la fonction Θ, étant

$$\Theta = 1,$$

l'équation (24) offre évidemment la forme la plus simple à laquelle on puisse réduire généralement le premier membre de l'équation finale, en le supposant représenté

par une fonction entière des coefficients

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K,$$

renfermés dans les équations (18).

Corollaire II. — La fonction

$$\varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K)$$

étant, par rapport aux coefficients

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K,$$

une fonction entière et homogène du degré $m+n$, la valeur de S fournie par l'équation (29), ou le premier membre de l'équation finale produite par une méthode quelconque d'élimination, sera d'un degré représenté par un nombre ou égal ou supérieur à $m+n$, suivant que Θ sera ou un facteur numérique, ou une fonction entière d'un degré supérieur à zéro. Dans le premier cas, les deux fonctions

$$S \quad\text{et}\quad \varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K)$$

se trouveront composées de termes correspondants et proportionnels, le rapport entre deux termes correspondants de la première et de la seconde étant précisément la valeur de Θ.

Corollaire III. — Si deux valeurs de S, fournies par deux méthodes diverses d'élimination, et représentées par deux fonctions entières des coefficients

$$a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K,$$

sont l'une et l'autre du degré $m+n$, elles seront toutes deux proportionnelles à la fonction

$$\varpi(a,\ b,\ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ldots,\ H,\ K),$$

de laquelle on les déduira en multipliant celle-ci par deux facteurs numériques. Donc aussi elles seront pro-

portionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un troisième facteur numérique égal au rapport des deux premières. Par suite, ces deux valeurs de S seront composées de termes correspondants et proportionnels, et deviendront égales, au signe près, si deux termes correspondants de l'une et de l'autre sont égaux ou ne diffèrent que par le signe.

Les démonstrations que nous avons données des théorèmes III et IV reposent sur ce principe : que l'équation finale, produite par l'élimination de x entre deux équations données, se vérifie toujours quand on établit, entre les racines ou les coefficients de celles-ci, des relations qui leur font acquérir des racines communes. Ce principe, admis par Euler, ne saurait être contesté en aucune manière, et s'étend au cas même où les équations données, cessant d'être algébriques, prendraient des formes quelconques. En effet, dire que l'élimination de x entre deux équations algébriques ou transcendantes

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

produit l'équation finale

$$S = 0,$$

dans laquelle S est indépendant de x, c'est dire que les deux premières équations, considérées comme pouvant subsister simultanément, entraînent la troisième : c'est donc, en d'autres termes, dire que la troisième équation subsiste toutes les fois que les deux premières acquièrent des racines communes.

Au reste, les méthodes d'élimination appliquées dans les deux premiers paragraphes de ce Mémoire à des équations algébriques fournissent, comme on devait s'y attendre, des résultats conformes au principe que nous venons de rappeler. En effet, suivant la première des

méthodes exposées dans le § Ier, le premier membre S de l'équation finale produite par l'élimination de x entre deux équations algébriques

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0,$$

se présentera immédiatement sous la forme

$$u f(x) + v F(x),$$

u, v désignant deux fonctions entières de la variable x et des coefficients que renferment les équations données. Donc ce premier membre, équivalent, quel que soit x, à la somme

$$u f(x) + v F(x),$$

s'évanouira si les valeurs des coefficients permettent d'attribuer à x une valeur qui fasse évanouir simultanément $f(x)$ et $F(x)$. On arrivera encore aux mêmes conclusions, si l'on adopte ou la seconde des méthodes exposées dans le § Ier, ou la méthode abrégée de Bezout, attendu que, dans l'une et dans l'autre hypothèse, les diverses équations successivement déduites des équations données, et par suite l'équation finale elle-même, seront toujours de la forme

$$u f(x) + v F(x) = 0,$$

u, v représentant ou deux fonctions entières de x et des coefficients renfermés dans $f(x)$, $F(x)$, ou les quotients qu'on obtient en divisant deux semblables fonctions par une certaine puissance de la variable x.

Lorsque, pour éliminer x entre deux équations algébriques de la forme

$$a x^n + b x^{n-1} + \ldots + h x + k = 0,$$

$$A x^m + B x^{m-1} + \ldots + H x + K = 0,$$

on emploie ou la méthode exposée dans ce paragraphe

et fondée sur la considération des fonctions symétriques, ou la première des méthodes rappelées dans le § Ier, ou, en supposant $m = n$, la méthode abrégée de Bezout, le premier membre S de l'équation finale, représenté par une fonction entière des coefficients

$$a,\ b, \ldots,\ h,\ k,\quad A,\ B,\ \ldots,\ H,\ K,$$

est toujours, par rapport à ces coefficients (*voir* les pages 393, 399 et 437), du degré $m + n$, par conséquent, lorsque m devient égal à n, du degré $2n$. Donc, en vertu du corollaire III du théorème IV, les trois valeurs de S, fournies par les trois méthodes, seront proportionnelles l'une à l'autre, l'une étant le produit de l'autre par un facteur numérique. J'ajoute que ce facteur numérique se réduira constamment à $+1$ ou à -1. En effet, la valeur de S, que fournira la première des méthodes rappelées dans le § Ier, renfermera une seule fois le terme

$$a^m K^n.$$

Or ce même terme se retrouve, avec le même signe, dans le développement de l'expression

$$(-1)^n \left[a^{\frac{m}{\omega}}(-K)^{\frac{n}{\omega}} - A^{\frac{n}{\omega}}(-k)^{\frac{m}{\omega}}\right]^{\omega},$$

qui, lorsqu'on a recours à la méthode fondée sur la considération des fonctions symétriques, représente la partie de S dépendant des seuls coefficients

$$a,\ A,\ k,\ K.$$

Enfin, lorsqu'on supposera $m = n$, le même terme

$$a^m K^n = a^n K^m$$

sera encore, au signe près (*voir* la page 399), l'un des termes contenus dans la valeur de S que fournira la méthode abrégée de Bezout. Donc les trois valeurs de S

fournies par les trois méthodes seront, au signe près, égales entre elles; et l'assertion émise à la page 399 se trouve complétement démontrée.

Remarquons encore que, dans le cas particulier où les degrés m, n des équations données sont des nombres premiers entre eux, et où l'on a par suite

$$\omega = 1,$$

la partie de S, qui dépend des seuls coefficients

$$a, \ A, \ k, \ K$$

dans l'équation finale réduite à sa forme la plus simple, est représentée par le binôme

$$a^m K^n - A^n k^m.$$

D'après ce qui a été dit dans ce paragraphe, pour éliminer x entre deux équations algébriques données, il suffit de joindre l'équation (4) aux formules qui servent à déduire des coefficients d'une équation algébrique les sommes des puissances entières des racines, ou de ces sommes les coefficients eux-mêmes. On peut d'ailleurs, pour atteindre ce but, employer deux sortes de formules qui déterminent les unes successivement, les autres d'un seul coup et d'une manière explicite, chacune des inconnues, c'est-à-dire chacune des sommes ou chacun des coefficients cherchés. Les formules de la première espèce sont celles qui ont été données par Newton, et dont la démonstration la plus élémentaire se trouve dans la *Résolution des équations numériques* de Lagrange (page 133). Quant aux formules de la seconde espèce, on pourrait les déduire des premières par une marche analogue à celle qu'a suivie M. Libri dans un Mémoire publié en 1829, qui en rappelle deux autres présentés par le même auteur à l'Académie des Sciences en 1823

et 1835. Mais alors ces formules, propres à déterminer immédiatement chaque inconnue, ne se présenteraient pas sous la forme la plus simple; et, pour diminuer autant que possible le nombre de leurs termes, il convient de les établir directement à l'aide de considérations analogues à celles dont j'ai fait usage dans l'extrait lithographié d'un Mémoire présenté à l'Académie le 9 août 1824. C'est au reste ce que j'expliquerai plus en détail dans un autre article.

THÉORIE DES INDICES;

Par M. FAURE,
Chef d'escadron d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Autres définitions géométriques des indices.

Des théorèmes démontrés précédemment on peut déduire diverses définitions géométriques de l'indice d'un système composé de deux points, de deux droites et de deux plans. Nous en signalons quelques-unes dans les paragraphes suivants, en nous bornant souvent à indiquer seulement la démonstration (*).

Indice du système de deux points e, e'.

46. *Deux points e, e' étant donnés, menons par le premier une droite ε rencontrant la surface S aux points a, b; par le second, menons une parallèle à ε,*

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339.

(**) Nous avons donne, t. XI, 1872, des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, plusieurs définitions des indices.

et désignons par a', b' *les points où cette parallèle rencontre les plans tangents aux points* a, b. *Si* ε *est la longueur du demi-diamètre parallèle à la droite* ε, *on a*

$$I_{ee'} = \frac{ea.e'b' + eb.e'a'}{2\varepsilon^2}.$$

Cette relation se déduit de la relation à quatre termes du n° 15.

Lorsque le point e' coïncide avec le point e,

$$I_e = \frac{ea.eb}{\varepsilon^2}.$$

47. *Si par la droite* ee' *on mène un plan qui touche la surface* S *au point* a, *et que l'on désigne par* E, E' *les plans diamétraux* oae, oae',

$$I_{ee'} = -4\, oae.oae'\, I_{EE'}.$$

Car, le point o étant le centre de la surface S, on a, par définition,

$$\begin{vmatrix} o & a & e \\ o & a & e' \end{vmatrix} = 4\, oae.oae'\, I_{EE'},$$

et l'on voit de suite que le déterminant se réduit à $-I_{ee'}$.

Lorsque le point e' coïncide avec le point e,

$$I_e = -4\,\overline{oae}^2\, I_E;$$

le point a est le point de contact d'un plan tangent de S mené par le point e.

Indice du système de deux droites.

48. *Si l'on désigne par* a *la trace de la droite* ε *sur le plan diamétral conjugué à la droite* ε', *et par* a' *la*

trace de la droite ε′ sur le plan diamétral conjugué à la droite ε, l'indice du système des droites ε, ε′, pris en signe contraire, est égal à l'indice du système des points a, a′ multiplié par l'indice du système des diamètres parallèles aux droites données.

Ce théorème se déduit de la définition n° 1 en prenant les points b, b' à l'infini et ayant égard au théorème du n° 11.

49. *La droite ε rencontrant la surface* S *aux points a, b, menons les plans tangents* A, B *en ces points et désignons par a′, b′ les traces de ces plans sur la droite ε′. Si ε est la longueur du demi-diamètre parallèle à la droite ε,*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = -\frac{ab.a'b'}{4\varepsilon^4}\frac{\sin\varepsilon' A \sin\varepsilon' B}{\sin\varepsilon A \sin\varepsilon B}.$$

D'après la définition, on a en effet, puisque $I_{aa'} = I_{bb'} = 0$,

$$ab.a'b' I_{\varepsilon\varepsilon'} = -I_{ab'} I_{ba'};$$

mais, d'après le n° 46,

$$I_{ab'} = \frac{ab.b'a'}{2\varepsilon^2}\frac{\sin\varepsilon' A}{\sin\varepsilon A}, \quad I_{ba'} = \frac{ba.a'b'}{2\varepsilon^2}\frac{\sin\varepsilon' B}{\sin\varepsilon B}.$$

Lorsque la droite ε′ coïncide avec ε,

$$I_\varepsilon = -\frac{\overline{ab}^2}{4\varepsilon^4}.$$

Si l'on mène le diamètre op qui rencontre au point p le plan tangent au point a, on a

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\overline{op}^2},$$

car il est visible que $\varepsilon^2 = op\,\frac{ab}{2}$.

50. *Par la droite ε menons les plans tangents* A, B *à la surface* S, *et soient* A, B *les produits des demi-axes des sections diamétrales parallèles aux plans tangents. Si l'on désigne par* A′, B′ *les plans menés par la droite* ε′ *et les points de contact* a, b *des plans* A, B,

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{(a, \varepsilon')(b, \varepsilon')}{A . B} \frac{\sin A'B'}{\sin AB};$$

D'après la relation 4° du n° 8, on a, puisque $I_{AA'} = I_{BB'} = 0$,

$$I_{AB'} I_{BA'} = \frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' I_{\varepsilon\varepsilon'}.$$

Or

$$I_{AB'} = \frac{(o, A)(a, B')}{\pi^2} = \frac{(a, B')}{\pi A} = \frac{(a, \varepsilon') \sin A'B'}{\pi A},$$

$$I_{BA'} = \frac{(b, \varepsilon') \sin A'B'}{\pi B}.$$

Lorsque la droite ε′ coïncide avec ε,

$$I_\varepsilon = \frac{(a, \varepsilon)^2}{A^2},$$

parce que

$$\frac{(a, \varepsilon)}{A} = \frac{(b, \varepsilon)}{B}.$$

Indice du système de deux plans E, E′.

51. *Si l'on désigne par a la trace du plan* E *sur le diamètre conjugué au plan* E′, *par a′ la trace du plan* E′ *sur le diamètre conjugué au plan* E, *l'indice du système des plans* E, E′, *pris en signe contraire, est égal à l'indice du système des points a, a′ multiplié par l'indice du système des plans diamétraux parallèles aux plans* E, E′.

Ce théorème se déduit de la définition, en prenant les points b, c, b', c' à l'infini et ayant égard à la relation du n° 12.

52. *Traçons dans le plan* E *une droite arbitraire, et soient* A, B *les plans tangents de la surface* S *menés par cette droite, a, b les points de contact. Menons le plan diamétral* N *qui passe par la droite arbitraire, et appelons* A′, B′ *les plans qui passent par la droite* NE′ *et les points de contact a, b. Si* N *est le produit des demi-axes de la section diamétrale déterminée par le plan* N,

$$I_{EE'} = -\left(\frac{\sin EA \sin E'B'}{\sin NA \sin NB'} + \frac{\sin EB \sin E'A'}{\sin NB \sin NA'}\right)\frac{1}{2N^2},$$

$$I_{EE'} = \frac{1}{2N^2}\,\frac{(a, E)(b, E') + (b, E)(a, E')}{(a, N)(b, N)}.$$

La première relation se déduit de celle à quatre termes du n° 19. Nous avons en effet, puisque $I_{AA'} = I_{BB'} = 0$,

$$I_{EE'} = -\frac{\sin EB \sin E'A' I_{AB'} + \sin EA \sin E'B' I_{BA'}}{\sin AB \sin A'B'}.$$

Or on voit que

$$I_{AB'} = \frac{1}{2N^2}\,\frac{\sin AB . \sin A'B'}{\sin NB . \sin NA'}, \quad I_{BA'} = \frac{1}{2N^2}\,\frac{\sin AB . \sin A'B'}{\sin NA . \sin NB'}.$$

La seconde est une conséquence de la première.

Lorsque la droite arbitraire prise dans le plan E est à l'infini, *ab* devient le diamètre conjugué à la direction de ce plan et

$$\pi^2 = -N^2(a, N)(b, N);$$

le plan N est parallèle au plan E; de là cette relation :

Deux plans E, E′ *étant donnés, menons le diamètre ab de la surface* S, *conjugué à la direction de l'un d'eux; les points a, b étant les points d'intersection de la surface avec ce diamètre,*

$$I_{EE'} = \frac{(a, E)(b, E') + (a, E')(b, E)}{2\pi^2}.$$

Si le plan E′ coïncide avec le plan E,

$$I_E = \frac{(E, A)(E, B)}{\pi^2},$$

en désignant par (E, A), (E, B) les distances du plan E aux plans tangents A, B parallèles au plan E.

Comme on a aussi

$$(E, A)(E, B) = (o, E)^2 - (o, A)^2,$$

et que $\pi = (o, A)E$, E désignant le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan E, on peut écrire

$$I_E = \frac{(o, E)^2}{\pi^2} - \frac{1}{E^2}.$$

On déduit de là cette autre définition :

L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal au produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan divisé par le cube du produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan.

53. *L'intersection des plans* E, E′ *coupant la surface* S *au point* a, *menons le plan tangent* A *en ce point, si* α, α' *sont les diamètres de la surface parallèles aux tangentes menées au point* a *aux sections faites par les plans* E, E′, *on a*

$$I^{EE'} = \frac{\sin EA \sin E'A}{(o, A)^2} I_{\alpha\alpha'}.$$

Soient P un plan quelconque, e, e' les points d'intersection de ce plan avec les droites AE, AE′, on a (8)

$$\begin{vmatrix} P & A & E \\ P & A & E' \end{vmatrix} = \frac{1}{\pi^4} \sin PAE \sin PAE' I_{ee'}.$$

Or le déterminant se réduit à $- I_{EE'} I_{AP}^2$, puisque

$$I_{AA} = I_{AE} = I_{AE} = 0,$$

et l'on a

$$I_{AP} = \frac{(o, A)(a, P)}{\pi^2},$$

avec $(a, P) = ae \sin \alpha P = ae' \sin \alpha' P$. D'ailleurs

$$\sin PAE = \sin AE . \sin \alpha P, \quad \sin PAE' = \sin AE' . \sin \alpha' P,$$

et par conséquent

$$I_{EE'} = - \frac{\sin AE . \sin AE'}{(o, A)^2} \frac{I_{ee'}}{ae . ae'}.$$

Or, lorsque le plan P s'éloigne à l'infini,

$$\frac{I_{ee'}}{ae . ae'} = - I_{\alpha\alpha'};$$

d'où résulte la relation indiquée.

Si le plan E' coïncide avec E,

$$I_E = \frac{\overline{\sin}^2 EA}{(o, A)^2} I_\alpha.$$

Le plan A est alors un plan tangent de la surface S mené en un quelconque des points d'intersection de la surface avec le plan E, et α est le diamètre parallèle à la tangente EA.

34. En représentant par

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \rho} + \frac{y^2}{\beta^2 + \rho} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \rho} = 1$$

l'équation générale des surfaces homofocales à la surface S dont l'équation est $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, nous dirons que ρ est le paramètre de cette homofocale, et nous la désignerons elle-même par cette lettre ρ.

La considération des paramètres des homofocales de

la surface S donne une nouvelle interprétation géométrique des indices.

Indice du système des points e, e′ par rapport à S. — Traçons l'homofocale ρ de S qui est conjuguée aux deux points e, e'; par rapport à cette surface, l'indice du système des points e, e' sera nul. Or, si xyz, $x'y'z'$ sont les coordonnées des deux points, l'indice du système des deux points sera

$$\frac{xx'}{\alpha^2+\rho}+\frac{yy'}{\beta^2+\rho}+\frac{zz'}{\gamma^2+\rho}-1=0.$$

Chassant le dénominateur, on a l'équation

$$\rho^3+A\rho^2+B\rho+C=0,$$

en posant

$$\begin{aligned}
A &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-xx'-yy'-zz',\\
B &= \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-(\beta^2+\gamma^2)xx'\\
&\quad -(\gamma^2+\alpha^2)yy'-(\alpha^2+\beta^2)zz',\\
C &= -\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{xx'}{\alpha^2}+\frac{yy'}{\beta^2}+\frac{zz'}{\gamma^2}-1\right)=-\pi^2 I_{ee'}.
\end{aligned}$$

Si donc ρ_1, ρ_2, ρ_3 désignent les paramètres des trois surfaces homofocales de S, qui sont conjuguées aux points e, e', l'indice du système de ces points est donné par la relation $I_{ee'}=\frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\pi^2}$.

L'indice du système des points e, e′ par rapport à la surface S *est égal au produit des paramètres des trois homofocales de* S *qui sont conjuguées aux points e, e′, divisé par le produit des carrés des demi-axes de* S.

Indices du système des deux droites ε, ε' *par rapport à* S.

Si l'on désigne par xyz, $x_1y_1z_1$ les coordonnées des

deux points e, f de la droite ε, par $x'y'z'$, $x'_1 y'_1 z'_1$ les coordonnées de deux points e', f' de la droite ε', l'indice du système de ces droites, par rapport à la surface S rapportée à ses axes, est donné par la relation

$$ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{vmatrix} \frac{1}{\alpha^2\beta^2} - \sum \begin{vmatrix} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{\gamma^2}.$$

Cette relation résulte de la définition : nous la donnons plus loin (85).

Traçons une surface ρ homofocale à S et conjuguée aux droites ε, ε'. L'indice du système de ces droites par rapport à ρ étant nul, nous avons

$$0 = \sum \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{vmatrix} (\gamma^2 + \rho) - \sum \begin{vmatrix} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{vmatrix} (\alpha^2 + \rho)(\beta^2 + \rho)$$

ou

$$A\rho^2 + B\rho + C = 0,$$

en posant

$$A = \sum \begin{vmatrix} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$B = \sum \begin{vmatrix} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{vmatrix} (\alpha^2 + \beta^2) - \sum \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{vmatrix},$$

$$C = \sum \begin{vmatrix} z & 1 \\ z_1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & 1 \\ z'_1 & 1 \end{vmatrix} \alpha^2\beta^2 - \sum \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'_1 \\ y' & y'_1 \end{vmatrix} \gamma^2.$$

Si ρ_1, ρ_2 sont les racines de cette équation,

$$\rho_1 \rho_2 = \frac{C}{A}.$$

Or

$$A = ef.e'f' \cos \varepsilon\varepsilon',$$

$$C = \pi^2 ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'};$$

par conséquent

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = -\frac{\rho_1 \rho_2 \cos \varepsilon\varepsilon'}{\pi^2}.$$

L'indice du système des droites $\varepsilon\varepsilon'$ *par rapport à la surface* S *est égal et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales de* S *qui sont conjuguées aux droites* $\varepsilon\varepsilon'$, *multiplié par le cosinus de l'angle de ces droites et divisé par le carré du produit des demi-axes de* S.

Indice du système des deux plans E, E' *par rapport à* S.

Soient

$$ax + by + cz = p, \quad a'x + b'y + c'z = p'$$

les équations des deux plans exprimés au moyen de la distance de ces plans au centre de S et des cosinus des angles que forment ces distances avec les axes de S. On aura

$$\pi^2 I_{EE'} = pp' - aa'.\alpha^2 - bb'.\beta^2 - cc'.\gamma^2.$$

Traçons une surface ρ homofocale à S et conjuguée aux deux plans E, E'; l'indice du système de ces plans, pris par rapport à ρ, étant nul, nous aurons

$$o = pp' - aa'(\alpha^2 + \rho) - bb'(\beta^2 + \rho) - cc'(\gamma^2 + \rho),$$

d'où

$$\pi^2 I_{EE'} - \rho \cos EE' = o$$

et

$$I_{EE'} = \frac{\rho \cos EE'}{\pi^2}.$$

L'indice du système des deux plans E, E' *par rapport à la surface* S *est égal au paramètre de l'homofocale de* S *conjuguée aux deux plans, multiplié par le cosinus de l'angle de ces plans et divisé par le carré du produit des demi-axes de* S.

Comme corollaires, nous déduisons ces théorèmes :

L'indice du point e par rapport à S *est égal au produit des paramètres des trois homofocales de* S *qui passent au point e divisé par* π^2.

L'indice de la droite ε *par rapport à* S *est égal et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales de* S *qui touchent la droite* ε *divisée par* π^2.

L'indice du plan E *par rapport à* S *est égal au paramètre de l'homofocale de* S *qui touche le plan divisé par* π^2.

Théorèmes relatifs à deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à la surface S *et à des systèmes correspondants.*

Lorsque les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à la surface S, les sommets a, b, c, d du premier ont pour plans polaires les faces A′, B′, C′, D′ du second et les sommets a', b', c', d' de ce dernier ont pour plans polaires les faces A, B, C, D du premier ; de plus les arêtes α, β, γ, λ, μ, ν ont pour polaires les arêtes λ', μ', ν', α', β', γ'.

Chaque sommet de l'un des tétraèdres étant conjugué à trois sommets de l'autre, il n'y a que les indices des systèmes de points aa', bb', cc', dd' qui ne sont pas nuls. De même les indices des systèmes de plans AA′, BB′, CC′, DD′ et des systèmes de droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$, sont seuls différents de zéro.

Étant donnés deux groupes de points a, b, c, d, a', b', c', d' et la surface S (les points étant au plus au nombre de quatre), si le point a est conjugué à tous les points du second groupe sauf le point a', et si en même temps le point a' est conjugué à tous les points du pre-

mier groupe, sauf le point a, nous dirons que les points a, a' sont *correspondants*. Les plans polaires de deux points correspondants déterminent des plans correspondants. Deux segments, deux triangles correspondants sont déterminés par deux ou trois groupes de points correspondants. Deux dièdres, deux trièdres correspondants sont déterminés par deux ou trois groupes de plans correspondants.

Ces systèmes correspondants sont faciles à construire ; si l'on veut, par exemple, déterminer un triangle correspondant au triangle abc, on tracera les plans polaires A′, B′, C′ des trois sommets et l'on coupera le trièdre ainsi formé par un plan quelconque; la section est un triangle correspondant au triangle abc.

En d'autres termes, on voit que deux systèmes correspondants sont des éléments constitutifs de deux certains tétraèdres polaires réciproques par rapport à la surface S.

A l'aide des théorèmes énoncés aux n°s 15, 18 et 19 ou bien au moyen des valeurs trouvées par X_r (21) et x_r (22), on déduit les conséquences suivantes :

55. *Deux tétraèdres abcd, a′b′c′d′ étant polaires réciproques par rapport à la surface* S, *l'indice du système des points e, e′ est donné par la relation*

$$-\pi^2 I_{ee'} = \frac{(e, A)(e', A')}{I_{AA'}} + \frac{(e, B)(e', B')}{I_{BB'}} + \frac{(e, C)(e', C')}{I_{CC'}} + \frac{(e, D)(e', D')}{I_{DD'}},$$

ou par la suivante, qui ne contient que des indices :

$$I_{ee'} = \frac{I_{ae'} I_{ea'}}{I_{aa'}} + \frac{I_{be'} I_{eb'}}{I_{bb'}} + \frac{I_{ce'} I_{ec'}}{I_{cc'}} + \frac{I_{de'} I_{ed'}}{I_{dd'}}.$$

Deux triangles abc, a′b′c′ étant correspondants par

rapport à la surface S, si l'on prend dans le premier un point e, dans le second un point e',

$$I_{ee'} = \frac{(e,\alpha)(e',\alpha')}{(a,\alpha)(a',\alpha')} I_{aa'} + \frac{(e,\beta)(e',\beta')}{(b,\beta)(b',\beta')} I_{bb'} + \frac{(e,\gamma)(e',\gamma')}{(c,\gamma)(c',\gamma')} I_{cc'}.$$

Deux segments ab, a'b' étant correspondants par rapport à la surface S, si l'on prend sur le premier un point e, sur le second un point e',

$$I_{ee'} = \frac{eb \,.\, e'b' \, I_{aa'} + ea \,.\, e'a' \, I_{bb'}}{ab \,.\, a'b'}.$$

Remarque. — Si l'on prend pour le point e le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre $abcd$, et pour le point e' le centre d'une sphère inscrite au tétraèdre $a'b'c'd'$, et si ces points sont tels que les deux sphères touchent de la même manière les faces des tétraèdres, la première relation donne, r et r' étant les rayons des sphères,

$$\frac{-\pi^2 I_{ee'}}{r \,.\, r'} = \frac{1}{I_{AA'}} + \frac{1}{I_{BB'}} + \frac{1}{I_{CC'}} + \frac{1}{I_{DD'}};$$

le premier membre de cette égalité est donc constant pour les huit systèmes de centres homologues, et, s'il arrive que, pour deux d'entre eux, $I_{ee'} = 0$, les centres de toutes les autres sphères seront conjugués deux à deux à la surface S.

56. *Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' étant polaires réciproques par rapport à la surface S, l'indice du système des plans* E, E' *est donné par la relation*

$$-\pi^2 I_{EE'} = \frac{(a,E)(a',E')}{I_{aa'}} + \frac{(b,E)(b',E')}{I_{bb'}} + \frac{(c,E)(c',E')}{I_{cc'}} + \frac{(d,E)(d',E')}{I_{dd'}};$$

ou par la suivante, qui ne contient que des indices :

$$I_{EE'} = \frac{I_{AE'} I_{EA'}}{I_{AA'}} + \frac{I_{BE'} I_{EB'}}{I_{BB'}} + \frac{I_{CE'} I_{EC'}}{I_{CC'}} + \frac{I_{DE'} I_{ED'}}{I_{DD'}}.$$

Deux trièdres ABC, A'B'C' *étant correspondants par rapport à la surface* S, *si par le sommet du premier on mène un plan* E, *par le sommet du second un plan* E',

$$I_{EE'} = \frac{\sin\lambda E \sin\lambda' E'}{\sin\lambda A \sin\lambda' A'} I_{AA'} + \frac{\sin\mu E \sin\mu' E'}{\sin\mu B \sin\mu' B'} I_{BB'} + \frac{\sin\nu E \sin\nu' E'}{\sin\nu C \sin\nu' C'} I_{CC'}.$$

Deux dièdres AB, A'B' *étant correspondants par rapport à la surface* S, *si par l'arête du premier on mène un plan* E, *par l'arête du second un plan* E',

$$I_{EE'} = \frac{\sin EB \sin E'B' I_{AA'} + \sin EA \sin E'A' I_{BB'}}{\sin AB \sin A'B'}.$$

Remarque. — L'indice $I_{ee'}$ est nul lorsque les points e, e' sont conjugués à la surface S; si donc le point e' coïncide avec le point e, en égalant à zéro les diverses valeurs de I_e, on obtient, à l'aide de la première valeur de I_e, une équation par points de la surface S; à l'aide de la seconde, celle à trois termes, on obtient les points d'intersection de cette surface avec la droite suivant laquelle se coupent les plans abc, $a'b'c'$.

Les valeurs de $I_{EE'}$, lorsque le plan E' coïncide avec le plan E, donnent lieu à des remarques analogues; ainsi $I_E = 0$ est une équation par plans de la surface S.

La surface S se trouve rapportée à deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à cette surface.

(*A suivre.*)

CENTRE DE GRAVITÉ DU TRONC DE PRISME TRIANGULAIRE OBLIQUE ;

PAR M. E. BRASSINNE.

La Note de M. Resal : *Sur la détermination du centre de gravité d'un tronc de prisme droit,* m'a remis en mémoire un petit travail inséré dans le *Journal de Mathématiques,* t. VIII, 1[re] série. La méthode dont j'ai fait usage s'applique à un tronc de prisme oblique dont les bases sont ABC, abc, les arêtes $\mathrm{A}a = h$, $\mathrm{B}b = h'$, $\mathrm{C}c = h''$. Deux plans $\mathrm{BC}a$, $\mathrm{C}ab$ décomposent le tronc en trois pyramides dont les volumes sont proportionnels à h, h', h''. Considérant ces quantités comme exprimant la grandeur de masses sphériques, on appliquera aux quatre sommets de chaque pyramide des masses égales en raison de son volume; on aura ainsi

Sommets.	Masses.
A	h
B	$h h'$
C	$h h' h''$
a	$h h' h''$
b	$h' h''$
c	h''

La somme de toutes les masses est $12\mathrm{H}$, en faisant $\mathrm{H} = \frac{h + h' + h''}{3}$.

Prenant la somme des moments de toutes les masses par rapport au plan ABC, ou au plan abc, en employant des distances obliques parallèles aux arêtes du tronc, on aura, dans les deux cas,

$$= \frac{h^2 + h'^2 + h''^2 + hh' + hh'' + h'h''}{12\mathrm{H}};$$

z est la distance oblique du centre de gravité à l'une ou l'autre base. Cette formule de M. Resal, qu'on écrit sans aucun calcul, démontre les théorèmes suivants :

1° *Si, par le centre de gravité du tronc, on mène une parallèle aux arêtes, terminée à ses deux bases, cette ligne sera divisée en deux parties égales par le centre de gravité ;*

2° *Les distances vraies du centre de gravité du tronc aux bases sont en raison des sinus des angles d'inclinaison des arêtes sur ces bases ;*

3° *Pour déterminer le centre de gravité, on divise le côté* CA *en parties proportionnelles à h, h'', on joint le point de division avec le milieu de* BC, *et l'on compose en g les masses $h + h''$, $2(h + h')$. Divisant ca en raison de $h' : h''$ et joignant le point de division avec le milieu de ab, on détermine un second point g' sur la base abc; le centre de gravité du tronc sera sur la droite gg'. Menant par ses extrémités des parallèles aux arêtes, on forme un plan qui coupe les bases suivant deux droites ; dans le trapèze ainsi construit, on trace une ligne parallèle aux arêtes et divisée par gg' en deux parties égales : l'intersection donne le centre de gravité du tronc.*

SUR LA RÉSOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS

$$(1) \qquad x^2 - 6y^2 = u^2, \quad x^2 + 6y^2 = v^2$$

EN NOMBRES ENTIERS ;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

On tire, de la seconde équation, en supposant $v + x$ divisible par 3, ce qui ne nuit pas à la généralité de la

solution,

$$y = 2rs, \quad x = 3r^2 - 2s^2,$$

ou bien

$$y = 2rs, \quad x = 6r^2 - s^2.$$

En portant ces valeurs dans la première équation, on en déduit l'une des deux suivantes :

$$(2) \qquad 9r^4 - 36r^2s^2 + 4s^4 = u^2,$$

$$(3) \qquad 36r^4 - 36r^2s^2 + s^4 = v^2.$$

On peut écrire l'équation (3) sous la forme

$$(6r^2 - 3s^2)^2 - 8s^4 = u^2;$$

on en déduit

$$(4) \qquad \begin{cases} 6r^2 - 3s^2 \pm u = \pm 2p^4, \\ 6r^2 - 3s^2 \mp u = \pm 4q^4, \\ s = pq. \end{cases}$$

Premier cas. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations précédentes, on obtient, par addition,

$$(p^2 - q^2)(2q^2 - p^2) = 6r^2,$$

et, en ne tenant pas compte des décompositions impossibles suivant le module 3,

$$p^2 - q^2 = 6g^2, \quad 2q^2 - p^2 = h^2;$$

d'où l'on tire le système

$$q^2 - 6g^2 = h^2, \quad q^2 + 6g^2 = p^2,$$

identique au système proposé. Ainsi, d'une solution quelconque x, y, u, v du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles, au moyen des formules

$$(A) \qquad \begin{cases} X = 6u^2y^2 - v^2x^2, & U = v^4 - 2x^4, \\ V = 6u^2y^2 + v^2x^2, & Y = 2xyuv. \end{cases}$$

Exemples numériques.

1° $x = 5,\quad y = 2,\quad u = 1,\quad v = 7,$
2° $X = 1201,\quad Y = 140,\quad U = 1151,\quad V = 1249.$

Second cas. — En prenant les signes supérieurs dans les seconds membres des équations (4), on a

$$(p^2 + q^2)(p^2 + 2q^2) = 6r^2,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad p^2 + q^2 = 2g^2,\quad p^2 + 2q^2 = 3h^2,\quad r = gh.$$

On déduit, de la première des équations précédentes,

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = g^2,$$

et, par la formule de résolution des triangles rectangles en nombres,

$$p = a^2 - b^2 + 2ab,$$
$$q = a^2 - b^2 - 2ab,$$
$$g = a^2 + b^2.$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (5), on a

$$3(a^4 + b^4 + 3a^2b^2) - 4ab(a^2 - b^2) = 3h^2,$$

et, en faisant $b = 3\beta$, il vient

$$(a^2 - 2a\beta - 9\beta^2)^2 + 32a^2\beta^2 = h^2.$$

Par la décomposition en facteurs, il résulte

$$h \pm (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 2c^2,$$
$$h \mp (a^2 - 2a\beta - 9\beta^2) = \pm 16d^2,$$
$$a\beta = cd,$$

et, par soustraction,

$$a^2 - 2a\beta - 9\beta^2 = \pm(c^2 - 8d^2).$$

Posons $c = ma$, et $\beta = md$; nous obtenons, par l'élimination de β et d, l'équation

$$a^2 - 2adm - 9d^2m^2 = \pm(m^2a^2 - 8d^2).$$

Nous exprimerons que la valeur de m tirée de ces équations est rationnelle, et nous aurons, en prenant le signe inférieur, la condition

$$18a^2d^2 - a^4 - 72d^4 = H^2,$$

impossible suivant le module 3. Au contraire, avec le signe supérieur, nous obtenons la valeur

$$m = \frac{ad \pm H}{a^2 + 9d^2},$$

avec la condition

$$(a^2 + 9d^2)^2 - 9d^4 = H^2.$$

La décomposition en facteurs nous donne

$$a^2 + 12d^2 = e^2, \quad a^2 + 6d^2 = f^2, \quad H = ef,$$

et, par suite, le système

$$f^2 - 6d^2 = a^2, \quad f^2 + 6d^2 = e^2,$$

identique au proposé; donc, d'une solution x, y, u, v, du système proposé, on déduit deux solutions nouvelles X, Y, U, V, au moyen des formules

$$(B)\quad \begin{cases} m = uy \pm vx, \\ n = u^2 + 9y^2, \\ r = (9m^2y^2 + n^2z^2)(8n^2y^2 + m^2z^2), \\ s = (9m^2y^2 - n^2z^2)^2 - 36m^2n^2u^2y^2, \\ X = 6r^2 - s^2, \\ V = 6r^2 + s^2, \\ Y = 2rs, \\ U = (n^2u^2 - m^2y^2 + 2mnuy)^4 - 2(n^2u^2 - m^2y^2 - 2mnuy)^4. \end{cases}$$

Exemples numériques.

1° $x = 5$, $y = 2$, $u = 1$, $v = 7$;
2° $X = 2639802$, $Y = 7776485$, $U = 4319999$, $V = 101136607$.

L'équation (2) est impossible ; en effet, on a aisément

$$3r^2 - 6s^2 \pm u = \pm 2p^4, \quad 3r^2 - 6s^2 \mp u = \mp 2q^4, \quad s = pq,$$

et, par addition,

$$3r^2 = 6p^2q^2 \pm (p^4 + 8q^4),$$

équation impossible suivant le module 8. Ainsi donc les formules (A) et (B) résolvent complétement le système proposé.

Remarque I. — Le système précédent conduit à la solution du problème : *Trouver trois carrés en progression arithmétique dont la raison est le sextuple d'un carré.*

Remarque II. — Le système considéré contient la résolution des équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^2 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^2;$$

on en déduit aisément que les équations biquadratiques

$$x^4 - 36y^4 = z^4 \quad \text{et} \quad x^4 - y^4 = 24z^4$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1876.

Composition de Mathématiques (6 heures).

On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY et telles que la droite PQ qui joint leurs points de contact P, Q avec les deux droites

passe par un point fixe donné A : 1° on demande le lieu du point d'intersection de la normale en P à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en Q; 2° on demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan; 3° on demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné. On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45 degrés et où le point donné A est sur la droite OX.

Composition de Physique (6 heures).

Première question — On a un gros thermomètre dont la tige est divisée en parties d'égale capacité v et qui contient un poids V d'eau et un poids P de phosphore dont la densité est d. Ce thermomètre est d'abord plongé dans la glace fondante, et le niveau de l'eau s'y arrête en un certain point que l'on note : 1° si l'on chauffe le thermomètre de zéro à 44 degrés, le niveau de l'eau monte de α divisions; quel est le coefficient a de dilatation du phosphore solide? 2° quand on maintient la température à 44 degrés, le phosphore fond et le niveau de l'eau dans le tube s'élève de 6 divisions; quelle est la dilatation b produite par la fusion sur l'unité de volume du phosphore? 3° si l'on chauffe ensuite l'appareil de 44 à 88 degrés, le niveau de l'eau dans le tube monte de γ divisions; quel est le coefficient de dilatation c du phosphore liquide?

N. B. On représentera la dilatation de l'eau de 4° à 0° par δ_0, de 0° à 44° par δ, et de 44° à 88° par δ'; le coefficient de dilatation du verre sera représenté par k.

Seconde question. — Un objet éclairé est à une dis-

tance s d'un tableau blanc sur lequel on veut projeter son image : 1° en essayant une lentille, on trouve qu'on peut lui donner deux positions pour lesquelles la projection a lieu, et que ces deux positions sont à une distance d; quel est le foyer de cette lentille? 2° supposons $d = \sqrt{161}$ et $s = 2^{m},3$, f aura une certaine valeur; prenons deux lentilles de ce foyer, fixons-les aux extrémités d'un tube dont la longueur est égale à $\frac{f}{4}$, et projetons de nouveau, avec ce système, l'image de l'objet sur le tableau : à quelle distance x de l'objet faudra-t-il mettre la première lentille, et quel sera le grossissement g que l'on obtiendra?

N. B. On construira l'image aussi exactement que possible.

QUESTIONS

Par M. S. REALIS.

I. Démontrer que l'expression

$$\frac{n(n+2)(n+4)(n+6)\ldots(n+2m-2)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)\ldots(n+2m-1)},$$

dans laquelle m est un entier positif, et n un nombre positif quelconque, se développe dans la suite terminée

$$1 - \frac{1}{n+1}m + \frac{1.3}{(n+1)(n+3)}\frac{m(m-1)}{2}$$
$$- \frac{1.3.5}{(n+1)(n+3)(n+5)}\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots$$

II. Démontrer que l'expression

$$\frac{1.3.5.7\ldots(2m-1)}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)\ldots(n+2m-1)},$$

dans laquelle m est un entier positif et n un nombre positif quelconque, se développe dans la suite terminée

$$1 - \frac{n}{n+1}m + \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}\frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)(n+5)}\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots$$

III. Démontrer que l'expression

$$\frac{2.4.6.8\ldots 2m}{(n+2)(n+4)(n+6)(n+8)\ldots(n+2m)},$$

dans laquelle m est un entier positif, et n un nombre positif quelconque, se développe dans la suite terminée

$$1 - \frac{n}{n+2}m + \frac{n}{n+4}\frac{m(m-1)}{2} - \frac{n}{n+6}\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Lionnet. — Je ne crois pas, comme M. H. Brocard, que le théorème (question 1075) : *Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre premier positif* A *et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à* A, puisse être une conséquence de la formule

$$N = \frac{A}{LA - 1,08366},$$

qui ne donne qu'approximativement le nombre N des nombres premiers non supérieurs à A, et de laquelle on déduit, par exemple, $N = 201$, pour $A = 3$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 984

(voir 2e série, t. IX, p. 143);

PAR M. MORET-BLANC.

1° *Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.*

2° *Si les quatre normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux quatre points conjugués. De plus, les deux triangles formés par les diagonales des deux quadrilatères circonscrits à l'ellipse aux pieds des deux groupes de normales ont même surface.*

3° *Considérons deux quadrilatères inscrit et circonscrit. Les normales aux quatre points, sommets du premier et points de contact du second, sont concourantes. La diagonale du quadrilatère circonscrit est symétrique par rapport à l'un des axes de l'ellipse de la droite joignant les milieux des côtés du quadrilatère inscrit, qui sont les polaires des extrémités de la diagonale considérée.* (A. SARTIAUX.)

Soient x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4 les coordonnées de quatre points de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0;$$

x'_1, y'_1; x'_2, y'_2; x'_3, y'_3; x'_4, y'_4 les coordonnées des points correspondants d'une ellipse homographique.

L'équation de la normale au point (x_1, y_1) de la première ellipse est

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y - c^2 x_1 y_1 = 0.$$

Les conditions pour que les normales aux quatre points considérés concourent en un même point sont donc

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les conditions pour que les normales aux quatre points correspondants de l'ellipse homographique concourent en un même point seront de même

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & x'_1 y'_1 \\ x'_2 & y'_2 & x'_2 y'_2 \\ x'_3 & y'_3 & x'_3 y'_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & x'_1 y'_1 \\ x'_2 & y'_2 & x'_2 y'_2 \\ x'_4 & y'_4 & x'_4 y'_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons qu'on n'altère pas ces équations en changeant les signes de tous les termes d'une colonne, ou en les multipliant par un même nombre.

1° Cela posé, si les ellipses homographiques ont même grand axe, cet axe étant à lui-même son homologue, les formules de correspondance sont

$$x' = \pm x, \quad y' = \beta y.$$

Or, si dans les équations (1) on multiplie les deux dernières colonnes par β, on obtient, en vertu des formules de correspondance, les équations (2). Donc : *Si les normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en sera de même pour les normales aux points homographiques des quatre points considérés situés sur des ellipses ayant même grand axe que la première.*

2° Les formules, pour passer d'un point à son conjugué, sont

$$x' = \pm \frac{a}{b} y, \quad y' = \mp \frac{b}{a} x.$$

Si, dans les équations (1), on multiplie les trois colonnes respectivement par $\pm \frac{a}{b}$, $\mp \frac{b}{a}$, -1, ce qui ne change rien, on obtiendra, en vertu des formules de correspondance, les équations (2). Donc : *Si les normales en quatre points d'une ellipse concourent en un même point, il en est de même des normales aux quatre points conjugués.*

L'ellipse et les deux quadrilatères circonscrits peuvent être considérés comme la projection d'un cercle et de deux quadrilatères circonscrits, dont les points de contact sont respectivement distants de 90 degrés, et qui, par suite, coïncideraient si l'on faisait tourner l'un d'eux de 90 degrés autour du centre. Ces derniers quadrilatères sont donc égaux, ainsi que les triangles formés par leurs diagonales; donc les projections des quadrilatères sont équivalentes, ainsi que celles des triangles.

3° La troisième partie du théorème est évidemment inexacte. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer le rectangle circonscrit formé par les tangentes aux sommets. Une diagonale de ce rectangle et la droite qui joint les milieux des cordes, polaires de ces sommets, loin d'être symétriques par rapport à un axe, se confondent. D'ailleurs, dans le cas général, ces deux lignes sont toujours d'un même côté du centre, car les droites qui joignent le centre à deux sommets opposés du quadrilatère circonscrit passent par les milieux des cordes, qui sont les polaires de ces sommets.

Je me propose de chercher la condition pour que les deux droites en question soient parallèles.

Soient x_1, y_1; x_2, y_2 les coordonnées de deux sommets opposés P, P_1 du quadrilatère circonscrit à l'ellipse

$$S = a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

La polaire du point (x_1, y_1),

$$a^2yy_1 + b^2xx_1 - a^2b^2 = 0,$$

coupe l'ellipse en deux points dont les coordonnées sont

$$x' = \frac{a^2(b^2x_1 + y_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y' = \frac{b^2(a^2y_1 - x_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2},$$

$$x'' = \frac{a^2(b^2x_1 - y_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y'' = \frac{b^2(a^2y_1 + x_1)\sqrt{S_1}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2},$$

en posant, pour abréger, $a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2 = S_1$.

Les normales à l'ellipse en ces points ont pour équations

$$a^2y'x - b^2x'y = c^2x'y',$$

$$a^2y''x - b^2x''y = c^2x''y''.$$

Elles se rencontrent en un point dont les coordonnées sont

$$x = \frac{c^2x'x''(y' - y'')}{a^2(y'x'' - x'y'')}, \quad y = \frac{c^2y'y''(x' - x'')}{b^2(y'x'' - x'y'')},$$

ou

$$x = \frac{c^2x_1(b^2 - y_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y = \frac{c^2y_1(a^2 - x_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}.$$

Les coordonnées du point de rencontre des normales menées aux points où la polaire du point P_1 (x_2, y_2) rencontre l'ellipse sont de même

$$x = \frac{c^2x_2(b^2 - y_2^2)}{a^2y_2^2 + b^2x_2^2}, \quad y = \frac{c^2y_2(a^2 - x_2^2)}{a^2y_2^2 + b^2x_2^2}.$$

Pour que les quatre normales concourent en un même

point, il faut que l'on ait

$$\frac{x_1(b^2-y_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}=\frac{x_2(b^2-y_2^2)}{a^2y_2^2+b^2x_2^2} \text{ et } \frac{y_1(a^2-x_1^2)}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}=\frac{y_2(a^2-x_2^2)}{a^2y_2^2+b^2x_2^2},$$

équations qui sont satisfaites par

$$x_1x_2=-a^2,\quad y_1y_2=-b^2;$$

et comme d'un point on ne peut mener que quatre normales à une ellipse, ces deux conditions, qui sont suffisantes, sont aussi nécessaires.

Soient M et M_1 les milieux des cordes, polaires des points P et P_1, les points O, M, P sont en ligne droite ainsi que O, M_1, P_1 (O est le centre de l'ellipse).

Les droites PP_1, MM_1 seront parallèles, si l'on a

$$\frac{OM}{OP}=\frac{OM_1}{OP_1}.$$

Les coordonnées du point M sont

$$x=\frac{x'+x''}{2}=\frac{a^2b^2x_1}{a^2y_1^2+b^2x_1^2},\quad y=\frac{a^2b^2y_1}{a^2y_1^2+b^2x_1^2},$$

$$\overline{OM}^2=\frac{a^4b^4(x_1^2+y_1^2)}{(a^2y_1^2+b^2x_1^2)^2};$$

donc

$$\frac{OM}{OP}=\frac{a^2b^2}{a^2y_1^2+b^2x_1^2};$$

de même

$$\frac{OM_1}{OP_1}=\frac{a^2b^2}{a^2y_2^2+b^2x_2^2}.$$

Pour que les droites PP_1, MM_1 soient parallèles (ou coïncidentes), il faut donc que l'on ait

$$a^2y_1^2+b^2x_1^2=a^2y_2^2+b^2x_2^2=\frac{a^2b^4}{y_1^2}+\frac{a^4b^2}{x_1^2}$$

$$=\frac{a^2b^2(a^2y_1^2+b^2x_1^2)}{x_1^2y_1^2},$$

ou

$$(a^2y_1^2 + b^2x_1^2)(x_1^2y_1^2 - a^2b^2) = 0,$$
$$x_1^2y_1^2 - a^2b^2 = 0,$$

c'est-à-dire que le point P doit se trouver sur l'une des hyperboles

$$xy = ab, \quad xy = -ab.$$

Le point P_1 appartient à l'autre branche de la même hyperbole.

Lorsque le point P décrit l'hyperbole $xy = ab$, le point de rencontre des normales décrit une ligne dont on obtient l'équation en éliminant x_1, y_1 entre les équations

$$x = \frac{c^2x_1(b^2 - y_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}, \quad y = \frac{c^2y_1(a^2 - x_1^2)}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2} \quad \text{et} \quad x_1y_1 = ab.$$

On trouve

$$ax + by = 0,$$

et

$$ax - by = 0,$$

si le point P décrit une branche de l'hyperbole $xy = -ab$.

Ainsi, quand le point P, qui détermine les quatre sommets du quadrilatère circonscrit, tel que les normales aux quatre points de contact concourent en un même point, décrit une branche de l'une des hyperboles conjuguées $xy = \pm ab$, le point de concours des normales décrit la portion de droite

$$ax \pm by = 0,$$

comprise dans la développée.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

I. Sulle origini del metodo delle equipollenze, Memoria del professore *Giusto Bellavitis*, membro effettivo del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti (Estratto dal vol. XIX delle Memorie dell' Istituto stesso). Venezia, presso la segreteria del R. Istituto, nel palazzo ducale. Tipografia di Giuseppe Antonelli, 1876.

II. Sur la théorie des nombres premiers, par *Edouard Lucas*, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université (Extrait des Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. XI; séance du 21 mai 1876). Imprimerie royale de Turin, 1876.

III. Relazioni metriche e di posizione nel triangolo rettilineo del Dott. *Giuseppe Bardelli*. Milano, Aprile 1876 (*).

IV. Éléments de Géométrie, par *A.-M. Legendre*. Nouvelle édition, revue et augmentée de plus de 600 applications, par *A. Gambier*, ancien élève de l'École normale de Gand, professeur de Mathématiques supérieures. Mons, *Hector Manceaux*, imprimeur-éditeur. Bruxelles, *Henri Manceaux*, libraire (1875).

(*) Estratto dal volume XIV del *Giornale di Matematiche*, diretto dal Prof. *G. Battaglini*, edito da B. Pellerano, strada di Chiaja, n° 60, Napoli.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

57. *Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' étant polaires réciproques par rapport à la surface* S, *l'indice du système des droites* ε, ε' *est donné par les relations suivantes :*

1° *Lorsque les droites sont données par deux de leurs points ef, e'f',*

$$\pi^4 ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{A})(e, \mathrm{B}) \\ (f, \mathrm{A})(f, \mathrm{B}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e', \mathrm{A}')(e', \mathrm{B}') \\ (f', \mathrm{A}')(f', \mathrm{B}') \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} \quad \text{(6 termes)}$$

$$ef.e'f'\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{ea'} & \mathrm{I}_{eb'} \\ \mathrm{I}_{fa'} & \mathrm{I}_{fb'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{ae'} & \mathrm{I}_{be'} \\ \mathrm{I}_{af'} & \mathrm{I}_{bf'} \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{aa'}\mathrm{I}_{bb'}} \quad \text{(6 termes).}$$

2° *Lorsque les droites sont déterminées par les intersections de deux couples de plans* EF, E'F',

$$-\pi^2 \sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'}\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (a, \mathrm{E})(b, \mathrm{E}) \\ (a, \mathrm{F})(b, \mathrm{F}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', \mathrm{E}')(b', \mathrm{E}') \\ (a', \mathrm{F}')(b', \mathrm{F}') \end{vmatrix} \frac{1}{\mathrm{I}_{aa'}\mathrm{I}_{bb'}} \quad \text{(6 termes)}$$

$$-\sin \mathrm{EF} \sin \mathrm{E'F'}\,\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{EA}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{EB}'} \\ \mathrm{I}_{\mathrm{FA}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{FB}'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{AE}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{BE}'} \\ \mathrm{I}_{\mathrm{AF}'} & \mathrm{I}_{\mathrm{BF}'} \end{vmatrix} \frac{\pi^2}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} \quad \text{(6 termes),}$$

on a aussi la relation suivante, qui ne contient que des indices :

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\alpha'}\mathrm{I}_{\alpha\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\alpha\alpha'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\beta'}\mathrm{I}_{\beta\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\beta\beta'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\gamma'}\mathrm{I}_{\gamma\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\gamma\gamma'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\lambda'}\mathrm{I}_{\lambda\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\lambda\lambda'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\mu'}\mathrm{I}_{\mu\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\mu\mu'}} + \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\nu'}\mathrm{I}_{\nu\varepsilon'}}{\mathrm{I}_{\nu\nu'}}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451.

Cette dernière se déduit aisément des précédentes; on a, en effet,

$$\begin{vmatrix} I_{ea'} & I_{eb'} \\ I_{fa'} & I_{fb'} \end{vmatrix} = ef.a'b'\,I_{\varepsilon\gamma'} \quad \begin{vmatrix} I_{ae'} & I_{be'} \\ I_{af'} & I_{bf'} \end{vmatrix} = ab.e'f'\,I_{\gamma\varepsilon'},$$

$$I_{aa'}I_{bb'} = ab.a'b'\,I_{\gamma\gamma'},$$

et, si l'on substitue ces valeurs dans la deuxième expression de $I_{\varepsilon\varepsilon'}$, on obtient la relation dont il s'agit.

Deux trièdres $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, étant correspondants par rapport à la surface S, *si par le sommet du premier on mène une droite ε, par le sommet du second une droite ε',*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\sin\varepsilon A \sin\varepsilon' A'}{\sin\lambda A \sin\lambda' A'} I_{\lambda\lambda'} + \frac{\sin\varepsilon B \sin\varepsilon' B'}{\sin\mu B \sin\mu' B'} I_{\mu\mu'} + \frac{\sin\varepsilon C \sin\varepsilon' C'}{\sin\nu C \sin\nu' C'} I_{\nu\nu'}.$$

Deux angles $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$ étant correspondants par rapport à la surface S, *si l'on mène par leurs sommets et dans leurs plans les droites ε, ε',*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\sin\varepsilon\mu \sin\varepsilon'\mu'\, I_{\lambda\lambda'} + \sin\varepsilon\lambda \sin\varepsilon'\lambda'\, I_{\mu\mu'}}{\sin\lambda\mu \sin\lambda'\mu'}.$$

Remarque. — Lorsque les droites ε, ε' sont conjuguées, $I_{\varepsilon\varepsilon'} = 0$. Si donc la droite ε' coïncide avec ε, en égalant à zéro la relation à six termes de l'expression I_ε on obtient une équation par droites de la surface S.

58. Les formules démontrées ci-dessus donnent lieu aux suivantes, dont nous aurons à faire usage :

Deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' sont polaires réciproques par rapport à la surface S.

Si l'on désigne par E *et* E' *les plans polaires des*

deux points e′ et e par rapport à une autre surface du second degré S′, on a les relations

(1) $$\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{EE'}}{I'_{EE'}}I'_{ee'} = \sum \frac{I'_{ae'}I'_{ea'}}{I_{aa'}},$$

(2) $$\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{ee'}}{I'_{ee'}}I'_{EE'} = \sum \frac{I'_{AE'}I'_{EA'}}{I_{AA'}};$$

et si l'on désigne par φ et φ′ les polaires de deux droites ε′ et ε par rapport à la surface S′,

(3) $$\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{\varphi\varphi'}}{I'_{\varphi\varphi'}}I'_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{I'_{\gamma\varepsilon'}I'_{\varepsilon\gamma'}}{I_{\gamma\gamma'}},$$

I′ désignant les indices par rapport à la surface S′ et π′ le produit des demi-axes de cette surface.

1° Pour démontrer la première relation, nous remarquons d'abord que

$$-\pi^2 I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{I_{aa'}};$$

or, si le point o' est le centre de la surface S′,

$$I'_{ae'} = -\frac{(a, E)}{(o', E)}, \quad I'_{ea'} = -\frac{(a', E')}{(o', E')},$$

par conséquent

$$(a, E)(a', E') = (o', E)(o', E')\, I'_{ae'} I'_{ea'}.$$

Nous avons alors

$$-\pi^2 \frac{I_{EE'}}{(o', E)(o', E')} = \sum \frac{I'_{ae'}I'_{ea'}}{I_{aa'}},$$

et, puisque

$$-\frac{I'_{ee'}}{I'_{EE'}} = \frac{\pi'^2}{(o', E)(o', E')},$$

la première relation est démontrée.

2° La seconde se trouve de la même manière, à l'aide

de l'égalité

$$-\pi^2 I_{ee'} = \sum \frac{(e,\ A)(e',\ A')}{I_{AA'}};$$

on a

$$I'_{AE'} = \frac{(e,\ A)(o',\ E')}{\pi'^2},\quad I'_{EA'} = \frac{(e',\ A')(o',\ E)}{\pi'^2},$$

d'où

$$(e,\ A)(e',\ A') = \frac{\pi'^4 I'_{AE'} I'_{EA'}}{(o',\ E)(o',\ E')};$$

par suite

$$-\frac{(o',\ E)(o',\ E')\pi^2}{\pi'^4} I_{ee'} = \sum \frac{I'_{AE'} I'_{EA'}}{I_{AA'}},$$

ce qui revient à la relation (2), en ayant égard à la valeur du produit (o', E) (o', E') écrite plus haut.

3° Considérons maintenant deux droites ε, ε': la première est déterminée par les points e et f, la seconde par les points e' et f'. Soient E′, F′ les plans polaires des points e et f; E, F les plans polaires des points e', f', par rapport à la surface S′. Appelant φ l'intersection EF, φ' l'intersection E′F′, les droites ε et φ', ε' et φ sont polaires réciproques par rapport à la surface S′. D'après la relation (3), nous avons

$$-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'}$$
$$= \sum \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix} \frac{I}{I_{aa'} I_{bb'}};$$

or

$$(a, E) = -(o', E) I'_{ae'},\quad (a, F) = -(o', F) I'_{af'}, \ldots,$$
$$(b, E) = -(o', E) I'_{be'},\quad (b, F) = -(o', F) I'_{bf'};$$

par conséquent

$$\frac{-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'}}{(o', E)(o', F)(o', E')(o', F')}$$
$$= \sum \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix} \frac{I}{I_{aa'} I_{bb'}};$$

mais

$$\begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} = ab.e'f' I,$$

$$\begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix} = ef.a'b' I_{\varepsilon\gamma'},$$

$$I_{aa'} I_{bb'} = ab.a'b' I_{\gamma\gamma'};$$

donc

$$\frac{-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'}}{ef.e'f'(o',E)(o',F)(o',E')(o',F')} = \sum \frac{I_{\gamma\varepsilon'} I_{\varepsilon\gamma'}}{I_{\gamma\gamma'}}.$$

D'autre part, nous avons les relations

$$\begin{vmatrix} I'_{ee'} & I'_{ef'} \\ I'_{fe'} & I'_{ff'} \end{vmatrix} = ef.e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'},$$

$$\begin{vmatrix} I'_{EE'} & I'_{EF'} \\ I'_{FE'} & I'_{FF'} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\pi'^2} \sin EF \sin E'F' I_{\varphi\varphi'},$$

et, puisque

$$I'_{ee'} = -\frac{\pi'^2 I'_{EE'}}{(o',E)(o',E')}, \quad I'_{ef'} = -\frac{\pi'^2 I'_{FE'}}{(o',E')(o',F)},$$

$$I'_{fe'} = -\frac{\pi'^2 I'_{EF'}}{(o',E)(o',F')}, \quad I'_{ff'} = -\frac{\pi'^2 I'_{FF'}}{(o',F)(o',F')},$$

la première devient

$$\begin{vmatrix} I'_{EE'} & I'_{FE'} \\ I'_{EF'} & I'_{FF'} \end{vmatrix} \frac{\pi'^4}{(o',E)(o',F)(o',E')(o',F')} = ef.e'f' I'_{\varepsilon\varepsilon'},$$

d'où résulte l'égalité

$$ef.e'f'(o',E)(o',F)(o',E')(o',F') I'_{\varepsilon\varepsilon'} = -\pi'^2 \sin EF \sin E'F' I'_{\varphi\varphi'}.$$

Nous avons par conséquent

$$\frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{I_{\varphi\varphi'}}{I'_{\varphi\varphi'}} I'_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{I'_{\gamma\varepsilon'} I'_{\varepsilon\gamma'}}{I_{\gamma\gamma'}}.$$

59. Du théorème général (n° 2), on déduit celui-ci :

Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de points correspondants, aa', bb', cc', dd' par rapport à une surface du second degré,

1° $$I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'} I_{dd'} = -\frac{36\,VV'}{\pi^2},$$

2° $$I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'} = 4\,DD'\,I_{DD'},$$

3° $$I_{aa'} I_{bb'} = \gamma.\gamma' I_{\gamma\gamma'};$$

V *et* V' *sont les volumes des tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$; D *et* D' *les aires des triangles* abc *et* $a'b'c'$; γ *et* γ' *les longueurs des segments* ab *et* $a'b'$.

Le déterminant Δ'_m (27) donne :

60. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de points correspondants par rapport à la surface* S:

1° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} + \frac{1}{I_{dd'}} = -1;$$

2° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} = \frac{1}{I_{nn'}};$$

n et n' sont les points d'intersection des plans abc, $a'b'c'$ avec le diamètre conjugué à l'autre plan;

3° $$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} = \frac{1}{I_{mm'}},$$

m et m' sont les points d'intersection des droites ab, $a'b'$ avec le plan diamétral conjugué à l'autre.

Démonstration. — Si l'on développe les déterminants Δ'_4, Δ'_3, Δ'_2, on trouve

$$I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'} I_{dd'} \left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} + \frac{1}{I_{dd'}}\right) = \frac{36\,VV'}{\pi^2},$$

$$I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'} \left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}}\right) = -4\,DD'\,I_{D_0D'_0},$$

$$I_{aa'} I_{bb'} \left(\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}}\right) = -\gamma\gamma' I_{\gamma_0\gamma'_0}.$$

Si l'on a égard au théorème précédent, la première relation devient évidente; relativement à la seconde, en remplaçant le produit $I_{aa'} I_{bb'} I_{cc'}$ par sa valeur, nous trouvons d'abord

$$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} + \frac{1}{I_{cc'}} = -\frac{I_{D_0 D'_0}}{I_{DD'}};$$

or, par définition (51),

$$I_{DD'} = -I_{nn'} I_{D_0 D'_0}:$$

donc, etc. Quant à la troisième, on a d'abord, en remplaçant le produit $I_{aa'} I_{bb'}$ par sa valeur,

$$\frac{1}{I_{aa'}} + \frac{1}{I_{bb'}} = -\frac{I_{\gamma_0 \gamma'_0}}{I_{\gamma\gamma'}};$$

or, par définition (48),

$$I_{\gamma\gamma'} = -I_{mm'} I_{\gamma_0 \gamma'_0}:$$

donc, etc.

Le déterminant ∇_m (8) nous donne ce théorème :

61. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de plans correspondants* AA', BB', CC', DD' *par rapport à une surface du second degré* S,

$$1^\circ \qquad I_{AA'} I_{BB'} I_{CC'} I_{DD'} = -\frac{1}{\pi^6} \frac{(3V)^3}{2\,ABCD} \frac{(3V')^3}{2\,A'B'C'D'},$$

$$2^\circ \qquad I_{AA'} I_{BB'} I_{CC'} = \frac{1}{\pi^4} \sin ABC \sin A'B'C' \, I_{dd'},$$

$$3^\circ \qquad I_{AA'} I_{BB'} = -\frac{1}{\pi^2} \sin AB \sin A'B' \, I_{\gamma\gamma'}.$$

A l'aide du déterminant ∇'_m (41), on trouve ce théorème :

62. *Étant donnés quatre, trois ou deux systèmes de*

plans correspondants par rapport à la surface S, *dont le centre est au point o,*

1°
$$\frac{(o, \mathrm{A})\,(o, \mathrm{A}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}} + \frac{(o, \mathrm{B})\,(o, \mathrm{B}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} + \frac{(o, \mathrm{C})\,(o, \mathrm{C}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{CC}'}} + \frac{(o, \mathrm{D},)\,(o, \mathrm{D}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{DD}'}} = \pi^2,$$

2°
$$\frac{(o, \mathrm{A})\,(o, \mathrm{A}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}} + \frac{(o, \mathrm{B})\,(o, \mathrm{B}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} + \frac{(o, \mathrm{C})\,(o, \mathrm{C}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{CC}'}} = \frac{(o, \mathrm{N})\,(o, \mathrm{N}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{NN}'}};$$

N *est le plan mené par le point* ABC *parallèlement au plan polaire du point* A′B′C′ *et* N′ *est le plan mené par le point* A′B′C′ *parallèlement au plan polaire du point* ABC;

3°
$$\frac{(o, \mathrm{A})\,(o, \mathrm{A}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{AA}'}} + \frac{(o, \mathrm{B})\,(o, \mathrm{B}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{BB}'}} = \frac{(o, \mathrm{M})\,(o, \mathrm{M}')}{\mathrm{I}_{\mathrm{MM}'}}.$$

M *est le plan mené par la droite* AB *parallèlement à la polaire de la droite* A′B′, M′ *est le plan mené par la droite* A′B′ *parallèlement à la polaire de la droite* AB.

Ce théorème peut se démontrer directement comme son homologue (60), mais il est plus simple de le regarder comme corrélatif de celui-ci et de lui appliquer la remarque du n° 10. Les points a, b, c, ..., ayant pour plans polaires les plans A′, B′, C′, ..., par rapport à la surface S, les points n, n', m, m' auront pour plans polaires les plans N, N′, M, M′ définis dans notre énoncé.

Les valeurs de δ_m (9) donnent ce théorème :

63. *Étant donnés trois ou deux systèmes de droites*

correspondantes $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, *les premières passant par le point* d, *les secondes par le point* d',

1° $$I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} I_{\nu\nu'} = -\frac{\sin\lambda\mu\nu \sin\lambda'\mu'\nu'}{\pi^2} I_{dd'}^2;$$

2° $$I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} = \sin\lambda\mu \sin\lambda'\mu' I_{dd'} I_{CC'}.$$

C *et* C' *sont les plans* $\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$.

Du n° 10, on déduit celui-ci :

64. *Étant donnés trois systèmes de droites correspondantes* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, *les premières situées dans un plan* D, *les secondes dans un plan* D',

$$I_{\alpha\alpha'} I_{\beta\beta'} I_{\gamma\gamma'} = \frac{DD'}{RR'} I_{DD'}^2,$$

D *et* D' *désignant aussi les aires des triangles* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, RR' *les rayons des cercles circonscrits à ces triangles.*

65. En combinant de diverses manières les théorèmes précédents, on obtient les relations suivantes :

Si l'on divise la relation 1° par la relation 2° (59), on trouve

(*a*) $$I_{dd'} I_{DD'} = -\frac{(d, D)(d', D')}{\pi^2};$$

les points d, d' sont les pôles des plans D, D'.

Si l'on divise la relation 2° par la relation 3° (59)

(*b*) $$I_{DD'} = \frac{I_{cc'} I_{\gamma\gamma'}}{(c, \gamma)(c', \gamma')};$$

c et c' sont deux points correspondants, γ, γ' deux droites correspondantes ; D est le plan (c, γ) et D' le plan (c', γ').

Si l'on divise la relation 2° par la relation 3° (61), on trouve d'abord

$$\pi^2 I_{CC'} = -\frac{\sin ABC \sin A'B'C'}{\sin AB \sin A'B'} \frac{I_{dd'}}{I_{\nu\nu'}};$$

mais

$$\sin ABC = \sin AB \sin(\nu, C), \quad \sin A'B'C' = \sin A'B' \sin(\nu', C');$$

par conséquent,

$$(c) \qquad I_{dd'} = -\pi^2 \frac{I_{CC'} I_{\nu\nu'}}{\sin(\nu, C)\sin(\nu', C')}.$$

Nous avons les relations

$$I_{aa'} I_{bb'} = \gamma\gamma' I_{\gamma\gamma'}, \quad I_{cc'} I_{dd'} = \nu\nu' I_{\nu\nu'},$$

ν et ν' désignant les longueurs des segments cd et $c'd'$. En multipliant ces deux relations et tenant compte de 1° (59), on trouve

$$-\frac{36VV'}{\pi^2} = \gamma.\nu.\gamma'.\nu' I_{\gamma\gamma'} I_{\nu\nu'};$$

or

$$6V = \gamma.\nu \mid \gamma, \nu \mid, \; 6V' = \gamma'.\nu' \mid \gamma', \nu' \mid,$$

par conséquent

$$(d) \qquad I_{\gamma\gamma'} I_{\nu\nu'} = -\frac{\mid \gamma, \nu \mid \mid \gamma', \nu' \mid}{\pi^2},$$

γ et ν sont deux droites arbitraires, γ' et ν' les polaires de ces droites par rapport à S.

Si l'on multiplie entre elles les relations 1° (63) et (64), on trouve, après quelques réductions faciles,

$$(e) \qquad I_{\alpha\alpha'} I_{\beta\beta'} I_{\gamma\gamma'} I_{\lambda\lambda'} I_{\mu\mu'} I_{\nu\nu'} = -\frac{(6V)^3 (6V')^3}{\pi^6 PP'}.$$

P est le produit des six arêtes du tétraèdre $abcd$, P' est le produit des six arêtes du tétraèdre $a'b'c'd'$ polaire du premier, par rapport à S.

Sphère adjointe aux deux plans A *et* B *relative à un point f.*

66. Deux plans A, B et un point f étant donnés, abais-

sons du point f une perpendiculaire fb' sur le plan A et soit a le point où cette perpendiculaire coupe le plan B; abaissons de ce même point f une perpendiculaire fa' sur le plan B et soit b le point où cette perpendiculaire coupe le plan A. La sphère décrite sur ab comme diamètre sera appelée la *sphère adjointe aux deux plans* A *et* B *relative au point* f.

Puissance d'un point m par rapport à la sphère adjointe.

Par le point f et le diamètre ab, menons le plan D, lequel coupe au point c l'intersection des plans A et B; par le diamètre ab menons un plan C perpendiculaire au plan D. Les quatre plans A, B, C, D déterminent un tétraèdre ayant pour sommets les points a, b, c, d; ce dernier d, situé à l'infini, est le pôle du plan D par rapport à la sphère. Si m est un point quelconque de l'espace, on a (14), les indices étant pris par rapport à la sphère,

$$\mathrm{I}_{mf} = \frac{(m, \mathrm{A})}{(a, \mathrm{A})} \mathrm{I}_{af} + \frac{(m, \mathrm{B})}{(b, \mathrm{B})} \mathrm{I}_{bf};$$

les deux autres termes sont nuls, puisque le point f est conjugué aux points c et d. Or, si l'on imagine les plans tangents à la sphère aux points a et b, on trouve, R étant le rayon de la sphère,

$$\mathrm{I}_{af} = \frac{(f, \mathrm{B})(a, \mathrm{A})}{2\mathrm{R}^2 \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B})}, \quad \mathrm{I}_{bf} = \frac{(f, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})}{2\mathrm{R}^2 \cos(\mathrm{A}, \mathrm{B})}.$$

D'ailleurs (16)

$$2\mathrm{I}_{mf} = \mathrm{I}_m + \mathrm{I}_f - \frac{\overline{mf}^2}{\mathrm{R}^2};$$

par conséquent

$$\mathrm{R}^2 \mathrm{I}_m - \overline{mf}^2 = - \mathrm{R}^2 \mathrm{I}_f + \frac{(m, \mathrm{A})(f, \mathrm{B}) + (m, \mathrm{B})(f, \mathrm{A})}{\cos \mathrm{AB}};$$

mais $\mathrm{R}^2 \mathrm{I}_m$ est la puissance P_m du point m par rapport à

la sphère, $R^2 I_f$ est la puissance du point f par rapport à cette même sphère et l'on a

$$R^2 I_f = fa.fb' = \frac{(f, A)(f, B)}{\cos(A, B)};$$

de là résulte la relation

$$\left(P_m - \overline{fm}^2\right)\cos(A, B) = -(f, A)(f, B) + (f, A)(m, B) + (f, B)(m, A).$$

Propriétés d'un système de deux surfaces du second degré et de deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à l'une d'elles.

67. Considérons deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ polaires réciproques par rapport à la surface S, et deux autres tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$ polaires réciproques par rapport à une seconde surface S'. Les sommets aa', bb', cc', dd' sont correspondants; de même les faces XX', YY', ZZ', TT' sont correspondantes. Les plans X, Y, Z, T sont les faces du tétraèdre $xyzt$ et par conséquent les plans polaires des sommets x', y', z', t'. Nous allons démontrer la relation

$$(a) \qquad \sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}.$$

I et I' désignent les indices pris par rapport aux surfaces S et S', π et π' les produits des demi-axes de ces mêmes surfaces, et le signe somme s'étend aux quatre couples de points ou de plans correspondants.

En effet, d'après la relation (55) appliquée à la surface S',

$$I'_{aa'} = \frac{I'_{xa'} I'_{ax'}}{I'_{xx'}} + \frac{I'_{ya'} I'_{ay'}}{I'_{yy'}} + \ldots,$$

$$I'_{bb'} = \frac{I'_{xb'} I'_{bx'}}{I'_{xx'}} + \frac{I'_{yb'} I'_{by'}}{I'_{yy'}} + \ldots;$$

on a des valeurs analogues pour $I'_{cc'}$ et $I'_{dd'}$. Substituons ces valeurs dans $\sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}}$ et appelons K la valeur de cette expression, nous trouvons

$$K = \frac{1}{I'_{xx'}}\left(\frac{I'_{xa'}I'_{ax'}}{I'_{aa'}} + \frac{I'_{xb'}I'_{bx'}}{I'_{bb'}} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{I'_{yy'}}\left(\frac{I'_{ya'}I'_{ay'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{yb'}I'_{by'}}{I_{bb'}} + \ldots\right) + \ldots.$$

Or, d'après (58), la première parenthèse a pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}I'_{xx'}$; la seconde a pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}}I'_{yy'}\ldots.$

On a, par suite,

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}} + \frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}} + \ldots\right);$$

le théorème est donc démontré, et l'on voit de plus que dans la relation (*a*) les deux sommes $\sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}}$ et $\sum \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}}$ sont séparément constantes, quels que soient les tétraèdres polaires réciproques que l'on considère. De là ces deux théorèmes :

68. *On donne deux surfaces du second degré* S *et* S'; *si l'on désigne par* aa', bb', cc', dd' *quatre couples de points correspondants par rapport à* S (*déterminant deux tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$ *polaires réciproques à* S), *la somme*

$$(b)\qquad \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bb'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cc'}}{I_{cc'}} + \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}} = K$$

sera constante quel que soit le système des points considérés.

On donne deux surfaces du second degré S *et* S'; *si l'on désigne par* XX', YY', ZZ', TT' *quatre couples*

de plans correspondants par rapport à S′ (*déterminant deux tétraèdres* XYZT, X′Y′Z′T′ *polaires réciproques à* S′), *la somme*

$$(c) \qquad \frac{I_{XX'}}{I'_{XX'}} + \frac{I_{YY'}}{I'_{YY'}} + \frac{I_{ZZ'}}{I'_{ZZ'}} + \frac{I_{TT'}}{I'_{TT'}} = K\frac{\pi'^2}{\pi^2}$$

sera constante quel que soit le système des plans considérés.

Déterminations de la constante K. — La constante K ayant la même valeur quels que soient les tétraèdres polaires réciproques par rapport à S et à S′, en choisissant convenablement ces tétraèdres, on arrive à des valeurs simples de la constante K.

1° Supposant en premier lieu que le sommet d du tétraèdre $abcd$ coïncide avec le centre o de S et que les points a, b, c soient à l'infini sur les diamètres conjugués oa, ob, oc, le tétraèdre polaire $a'b'c'd'$ se confondra avec $abcd$, de sorte que

$$K = \frac{I'_a}{I_a} + \frac{I'_b}{I_b} + \frac{I'_c}{I_c} + \frac{I'_o}{I_o}.$$

Mais, si α, β, γ sont les longueurs des demi-diamètres de S dirigés suivant oa, ob, oc, et α', β', γ' les longueurs des demi-diamètres de S′ respectivement parallèles, on a, les points a, b, c étant à l'infini,

$$\frac{I'_a}{I_a} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2}, \quad \frac{I'_b}{I_b} = \frac{\beta^2}{\beta'^2}, \quad \frac{I'_c}{I_c} = \frac{\gamma^2}{\gamma'^2},$$

et comme, d'ailleurs, $I_0 = -1$,

$$K = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} + \frac{\beta^2}{\beta'^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma'^2} - I'_o.$$

2° On peut écrire

$$K = I'_o\left(\frac{I'_a}{I_a I'_o} + \frac{I'_b}{I_b I'_o} + \frac{I'_c}{I_c I'_o} + \frac{1}{I_o}\right);$$

désignons par $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$ les points d'intersection de la surface S′ avec les diamètres oa, ob, oc.

$$\frac{I'_a}{I_a I'_o} = \frac{\alpha^2}{oa_1 . oa_2}, \quad \frac{I'_b}{I_b I'_o} = \frac{\beta^2}{ob_1 . ob_2}, \quad \frac{I'_c}{I_c I'_o} = \frac{\gamma^2}{oc_1 . oc_2};$$

donc

$$K = I'_o \left(\frac{\alpha^2}{oa_1 . oa_2} + \frac{\beta^2}{ob_1 . ob_2} + \frac{\gamma^2}{oc_1 . oc_2} - 1 \right).$$

3° Par le centre o' de la surface S′, menons trois diamètres conjugués à cette surface, $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$; les points $x'y'z'$ étant à l'infini, le tétraèdre $o'x'y'z'$ est à lui-même son polaire par rapport à S′. Soient X′, Y′, Z′, T′ les faces de ce tétraèdre, la dernière T′ étant le plan de l'infini. Nous avons vu que

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{X'}}{I'_{X'}}.$$

Appelons X′, Y′, Z′ les produits des demi-axes principaux des sections faites dans S′ par les plans diamétraux X′, Y′, Z′; soient aussi X, Y, Z les produits des demi-axes des sections faites dans S par trois plans diamétraux X, Y, Z parallèles aux premiers, on a (53)

$$I_{X'} = \frac{(o, X')^2}{\pi^2} - \frac{1}{X^2}, \quad I'_{X'} = -\frac{1}{X'^2};$$

donc

$$\frac{I_{X'}}{I'_{X'}} = \frac{X'^2}{X^2} - \frac{(o, X')^2 X'^2}{\pi^2};$$

on a des valeurs analogues pour $\frac{I_{Y'}}{I'_{Y'}}$, $\frac{I_{Z'}}{I'_{Z'}}$.

Lorsque T′ est un plan quelconque,

$$I_{T'} = \frac{(o, T')^2}{\pi^2} - \frac{1}{T^2}, \quad I'_{T'} = \frac{(o', T')^2}{\pi'^2} - \frac{1}{T'^2},$$

et, si ce plan est à l'infini,

$$\frac{I_{T'}}{I'_{T'}} = \frac{\pi'^2}{\pi^2},$$

de sorte que

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{X'^2}{X^2} + \frac{Y'^2}{Y^2} + \frac{Z'^2}{Z^2}\right)$$
$$- \frac{1}{\pi'^2}\left[(o, X')^2 X'^2 + (o, Y')^2 Y'^2 + (o, Z')^2 Z'^2 - \pi'^2\right].$$

Or, d'après (55), l'expression comprise dans la seconde parenthèse a pour valeur $\pi'^2 I'_0$; donc

$$K = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\left(\frac{X'^2}{X^2} + \frac{Y'^2}{Y^2} + \frac{Z'^2}{Z_2}\right) - I'_o.$$

4° Soient X_1X_2, Y_1Y_2, Z_1Z_2 les plans tangents de S parallèles aux plans diamétraux X, Y, Z de S, et X'_1, Y'_1, Z'_1 des plans tangents de S′ parallèles à ces mêmes plans, on a (53)

$$I_{X'} = \frac{(X', X_1)(X', X_2)}{\pi^2}, \quad I'_{X'} = -\frac{(X', X'_1)^2}{\pi'^2},$$

en désignant généralement par (X', X_1) la distance de deux plans parallèles X', X_1, d'où

$$\frac{I_{X'}}{I'_{X'}} = -\frac{(X', X_1)(X', X_2)}{(X', X'_1)^2}\frac{\pi'^2}{\pi^2};$$

donc

$$K = 1 - \frac{(X', X_1)(X', X_2)}{(X', X'_1)^2} - \frac{(Y', Y_1)(Y', Y_2)}{(Y', Y'_1)^2}$$
$$- \frac{(Z', Z_1)(Z', Z_2)}{(Z', Z'_1)^2}.$$

La comparaison de ces diverses valeurs de la constante K donne plusieurs théorèmes que chacun pourra énoncer.

(*A suivre.*)

SUR LES RAPPORTS QUI EXISTENT ENTRE LE TRIANGLE ARITHMÉTIQUE DE PASCAL ET LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Si l'on désigne par S_n la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des x premiers nombres entiers, on tire de la formule

$$(x-1)^n = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} - \ldots,$$

en y faisant successivement x égal à 1, 2, 3, ..., x, et en additionnant, la formule symbolique

$$(1) \qquad x^n = S^n - (S-1)^n.$$

On a, en particulier,

$$\begin{aligned}
+x &= S_0,\\
-x^2 &= S_0 - 2S_1,\\
+x^3 &= S_0 - 3S_1 + 3S_2,\\
-x^4 &= S_0 - 4S_1 + 6S_2 - 4S_3,\\
+x^5 &= S_0 - 5S_1 + 10S_2 - 10S_3 + 5S_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On en déduit, par exemple,

$$(2) \qquad 1.2.3.4.5.S_4 = \begin{vmatrix} +x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ +x^3 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ -x^4 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ +x^5 & 1 & 5 & 10 & 10 \end{vmatrix}.$$

Les coefficients du second membre sont entiers, et l'on voit que, en général, S_n est divisible par le produit $x(x+1)$.

En posant, symboliquement,

$$(3)\qquad nS_{n-1} = (x+B)^n - B^n,$$

et en remplaçant dans le second membre les exposants de B par des indices, on obtient les nombres de Bernoulli. La comparaison de cette formule avec la précédente conduit immédiatement à l'expression générale du nombre B_n, sous la forme d'un déterminant d'ordre quelconque, égal ou supérieur à n, et formé au moyen du triangle arithmétique.

2. On peut exprimer les sommes S, et par suite les nombres B, au moyen de fonctions entières quelconques, de la manière suivante :

Soit la fonction

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}x^n + a_{i,1}x^{n-1} + \ldots + a_{i,n};$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ..., x, et en additionnant, il vient

$$f_i(x+1) - f_i(x) = a_{i,0}S_n + a_{i,1}S_{n-1} + \ldots + a_{i,n}S_0.$$

En considérant $n+1$ fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_n$, on en déduit S_{n-i} et, par suite, B_{n-i} au moyen de déterminants du $n^{ième}$ ordre. On peut obtenir encore les expressions de S et de B par des déterminants d'ordre moitié moindre, en se servant des formules symboliques

$$(x+1)^n + x^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n,$$
$$(x+1)^n - x^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S^n,$$
$$(2x+1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en

deux. On déduit, par exemple, de la dernière, en posant $2x+1=y$,

$$2^{2n+1}\,1.3.5\ldots(2n+1)\,S_{2n}$$
$$=\begin{vmatrix} y^{2n+1} & 1 & C^2_{2n+1} & C^4_{2n+1} & \ldots & C^{2n-4}_{2n+1} & C^{2n-2}_{2n+1} \\ y^{2n-1} & 1 & C^2_{2n-1} & C^4_{2n-1} & \ldots & C^{2n-4}_{2n-1} & C^{2n-2}_{2n-1} \\ \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^5 & 1 & C^2_5 & C^4_5 & \ldots & 0 & 0 \\ y^3 & 1 & C^2_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On voit ainsi immédiatement que S_{2n} est divisible par $2x+1$, et, par suite, par S_2; de plus, S_{2n} est une fonction impaire de $2x+1$.

3. Enfin, si l'on se sert de la formule symbolique

$$f(B+1)-f(B)=f'(0),$$

ou même des formules plus générales que j'ai présentée à l'Académie des Sciences (*), on peut obtenir très-facilement l'expression de B_n au moyen de coefficients quelconques, ou même au moyen de déterminants dont les différents termes contiennent les nombres de Bernoulli, ou leurs produits deux à deux, trois à trois, etc.

NOTE SUR L'ORIGINE DE L'IDÉE DE LA CINÉMATIQUE;

Par M. LIGUINE,
Professeur à l'Université d'Odessa.

Au sujet d'un article de M. Transon (**), où ce savant tend à démontrer que la priorité de l'idée de la

---

(*) *Voir* les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 4 septembre 1876.

(**) *Voir* ce Journal, t. XIII de la 2e série, p. 305-318.

science définie par Ampère sous le nom de *Cinématique* appartient à Wronski, M. E. Lucas, dans une Lettre insérée dans un des derniers numéros de ce journal (t. XV, p. 92 et 93), fait observer que « l'idée de la Cinématique n'est ni d'Ampère, ni de Wronski, mais qu'elle appartient tout entière à Carnot ou peut-être à un géomètre plus ancien. »

Qu'il me soit permis de rappeler à cette occasion le passage suivant d'un Mémoire bien connu d'Euler, intitulé *Formulæ generales pro translatione quacumque corporum rigidorum* et publié dans les *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ* (t. XX, p. 189) en 1776, c'est-à-dire plus de vingt ans avant la publication de l'*Essai sur les machines en général* (1797) (*) et de la *Géométrie de position* (1803) de Carnot :

« Quando corporis cujusque rigidi motum determinari oportet, tota investigatio commode in duas partes distinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte sola translatio corporis ex dato situ in alium quemcumque sine ullo respectu habito ad motus principia per formulas analyticas repræsentari debet, quarum ope positio singulorum punctorum post translationem ex earum positione initiali definiri queat; quæ ergo investigatio unice ad Geometriam vel potius ad Stereometriam est referenda. Facile autem intelligitur, si ista investigatio ab altera, quæ proprie ad Mechanicam pertinet, separetur, tum ipsam motus determinationem ex principiis motus multo facilius expediri posse, quam si utraque investigatio conjunctim suscipiatur. Cum

(*) C'est dans cet Ouvrage que Carnot a exposé pour la première fois l'idée de ses *mouvements géométriques*, repetée ensuite dans la *Géométrie de position*.

igitur in tractatu meo *De motu corporum rigidorum* hanc utramque investigationem simul suscepissem, unde tota tractatio non parum molesta et intricata est reddita : hoc loco solam partem geometricam accuratius evolvere constitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri possit. »

Ce passage, ainsi que le Mémoire même auquel il sert d'introduction, me paraissent montrer clairement que l'idée de pouvoir étudier certaines propriétés du mouvement indépendamment de ses causes remonte tout au moins jusqu'à Euler. Mais, en ce qui concerne le projet de fonder sur cette idée la création d'une branche indépendante de la Mécanique, je ne crois pas qu'on en puisse contester la priorité à Wronski, eu égard aux faits exposés dans l'article cité de M. Transon.

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE TRICIRCULAIRE ET TÉTRASPHÉRIQUE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. Si l'on désigne par x, y, z les puissances d'un point du plan par rapport à trois cercles, divisées respectivement par le diamètre de chaque cercle, et par A, B, C les angles de ces cercles entre eux, faire voir que le cercle orthogonal des cercles donnés a pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B & x \\ \cos C & 1 & \cos A & y \\ \cos B & \cos A & 1 & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Si l'on désigne par S l'aire du triangle des cen

tres des trois cercles, et par R le rayon du cercle orthogonal, on a

$$4R^2S^2 = -r_1^2 r_2^2 r_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & 1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix}.$$

3. L'ensemble des cercles passant par trois des six points d'intersection des trois cercles donnés a pour équation

$$\frac{\cos(B \pm C) - \cos A}{x} + \frac{\cos(C \pm A) - \cos B}{y} + \frac{\cos(A \pm B) - \cos C}{z} = 0.$$

Cette équation devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes.

4. Le couple des cercles tangents à la fois, soit intérieurement, soit extérieurement, au tricycle de référence a pour équation

$$\sin\frac{A}{2}\sqrt{x} + \sin\frac{B}{2}\sqrt{y} + \sin\frac{C}{2}\sqrt{z} = 0.$$

5. Le carré du rayon du cercle orthogonal à trois cercles est la moyenne harmonique des produits des rayons des cercles tangents du même couple.

6. Quelles sont les conditions pour que l'équation

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

représente un système de deux cercles. Faire voir que ces conditions sont identiques avec celles qui expriment que l'équation (1) représente un cône de révolution dans un système d'axes faisant entre eux les angles sous lesquels se coupent les trois cercles. Calculer les rayons et

l'angle des cercles du système, et la position des points limites.

7. Donner des résultats analogues pour la Géométrie de l'espace (*).

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1875 ;

PAR M. GAMBEY.

On donne trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz *et l'on imagine un conoïde ayant pour directrice rectiligne l'axe* Oz, *pour plan directeur le plan* xOy, *et pour directrice curviligne une courbe également donnée* C. *On demande de déterminer les projections, sur le plan des* (x, y), *des lignes asymptotiques de la surface.*

On appliquera les formules au cas particulier où la directrice curviligne C *est définie par les équations*

$$x^2 + y^2 - a(x + y) = 0,$$
$$x + y - z - a = 0.$$

Définissons d'abord les lignes asymptotiques d'une surface. Ce sont des lignes tracées sur cette surface et telles qu'en chacun de leurs points elles aient pour tangente l'une des asymptotes de l'indicatrice correspondante.

Il en résulte qu'en chaque point d'une surface passent deux lignes asymptotiques de cette surface.

(*) Extrait d'un Mémoire inédit : *Sur l'application des coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques.*

D'après cela, et nous fondant sur les propriétés des tangentes conjuguées, nous écrirons que les cosinus des angles, que fait avec les axes de coordonnées l'intersection du plan tangent au point (x, y, z) et du plan tangent au point infiniment voisin, sont proportionnels aux projections sur les mêmes axes de l'élément ds de l'une des lignes asymptotiques passant par ce point.

Posons

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2 z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2 z}{dx\,dy}, \quad t = \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

L'équation du plan tangent au point (x, y, z) est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

celle du plan tangent au point infiniment voisin (x', y', z') est

$$Z - z' = p'(X - x') + q'(Y - y'),$$

p' et q' désignant ce que deviennent p et q quand on passe du point (x, y, z) au point (x', y', z').

Les cosinus des angles que fait avec les axes l'intersection de ces deux plans sont proportionnels à

$$q' - q, \quad -(p' - p), \quad pq' - qp',$$

ou

$$dq, \quad -dp, \quad p\,dq - q\,dp,$$

ou encore à

$$s\,dx + t\,dy, \quad -(r\,dx + s\,dy), \quad p(s\,dx + t\,dy) - q(r\,dx + s\,dy);$$

nous avons donc

$$\frac{s\,dx + t\,dy}{dx} = \frac{-(r\,dx + s\,dy)}{dy} = \frac{p(s\,dx + t\,dy) - q(r\,dx + s\,dy)}{dz}.$$

Ce sont les équations différentielles des lignes asymptotiques de la surface considérée $f(x, y, z) = 0$.

Les deux premiers rapports donnent la projection sur le plan des xy. On en tire facilement

$$(1)\qquad t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\left(\frac{dy}{dx}\right) + r = 0,$$

où l'on substituera les valeurs en x et y de r, s, t tirées de $f(x, y, z) = 0$.

Remarquons que l'on aurait pu former cette équation immédiatement en écrivant que les coefficients angulaires des tangentes à la projection des lignes asymptotiques sont égaux à ceux des asymptotes de l'indicatrice au point considéré.

Pour intégrer l'équation (1), nous résoudrons d'abord par rapport à $\frac{dy}{dx}$, ce qui donnera deux équations distinctes, savoir

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Considérant maintenant le conoïde droit de l'énoncé, dont l'équation est, en posant $\frac{y}{x} = u$,

$$z = \varphi(u),$$

on en tire facilement

$$r = \frac{u^2}{x^2}\varphi''(u) + \frac{2u}{x^2}\varphi'(u),$$

$$s = \frac{-u}{x^2}\varphi''(u) - \frac{1}{x^2}\varphi'(u),$$

$$t = \frac{1}{x^2}\varphi''(u),$$

d'où

$$s^2 - rt = \left[\frac{\varphi'(u)}{x^2}\right]^2.$$

Ainsi, dans les conoïdes, l'expression $s^2 - rt$ est un carré parfait.

L'équation (2) deviendra

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u\varphi''(u) + \varphi'(u) \pm \varphi'(u)}{\varphi''(u)},$$

d'où, d'abord,

(3) $$\frac{dy}{dx} = u + \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)}.$$

Mais, de $y = ux$, on déduit

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx},$$

de sorte que l'égalité (3) devient

$$x\frac{du}{dx} = \frac{2\varphi'(u)}{\varphi''(u)},$$

ou bien

(4) $$\frac{dx}{x} = \frac{\varphi''(u)}{2\varphi'(u)}\,du,$$

et les variables sont séparées.

La seconde valeur de $\frac{dy}{dx}$ conduit à

(5) $$\frac{du}{dx} = 0,$$

d'où

$$u = \text{const.}$$

Appliquons ces formules au conoïde particulier de l'énoncé dont l'équation est

$$z = \frac{2axy}{x^2 + y^2} = \frac{2au}{1 + u^2},$$

nous aurons

$$\varphi'(u) = \frac{2a(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2}, \quad \varphi''(u) = \frac{4au(u^2 - 3)}{(1 + u^2)^3},$$

et l'équation (4) devient

$$\frac{dx}{x} = \frac{u(u^2-3)}{1-u^4}\,du,$$

d'où, en intégrant,

$$\log x = \log C\,\frac{\sqrt{u^2-1}}{u^2+1},$$

C étant une constante arbitraire, puis

$$(6)\qquad (x^2+y^2)^2 = C^2(y^2-x^2).$$

Les lignes asymptotiques sont donc en projection des droites et des lemniscates.

PROBLÈME;

Par M. ASTOR.

Étant donnée une ellipse, on lui mène en un de ses points le cercle osculateur, on mène la deuxième tangente commune au cercle et à l'ellipse, et l'on demande le lieu de son point de rencontre avec la tangente au point d'osculation.

On sait que, si l'on mène à une ellipse divers cercles tangents en un même point, le lieu des points de rencontre des secondes tangentes communes est l'hyperbole homofocale de l'ellipse qui passe par le point donné sur cette dernière. Or, si le cercle considéré devient le cercle osculateur, une troisième tangente commune coïncidera avec la tangente au point d'osculation, et la deuxième tangente commune viendra couper la tangente considérée sur l'hyperbole homofocale. Un point du lieu cherché est donc donné par la deuxième intersection

d'une tangente à l'ellipse avec l'hyperbole homofocale du point de contact. Cette propriété permet de trouver le lieu d'une manière assez commode.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse, et $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ les coordonnées du point de contact ; l'équation de la tangente est

$$(1) \qquad \frac{x}{a}\cos\varphi+\frac{y}{b}\sin\varphi=1,$$

celle de l'hyperbole homofocale

$$(2) \qquad \frac{x^2}{\cos^2\varphi}-\frac{y^2}{\sin^2\varphi}=c^2.$$

Entre (1) et (2), il suffit d'éliminer φ pour avoir le lieu ; mais, comme (1) et (2) sont satisfaites quand on y fait $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$, il est clair que le résultat de l'élimination contiendra en facteur l'équation de l'ellipse. Il s'agira donc de dégager ce facteur.

Pour faire l'élimination, formons au moyen de (1) une équation bicarrée en $\operatorname{tang}\varphi$; quant à (2), elle s'écrit immédiatement sous la même forme. Les deux équations sont alors

$$x^2\operatorname{tang}^4\varphi+(x^2-y^2-c^2)\operatorname{tang}^2\varphi-y^2=0,$$

$$\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)^2\operatorname{tang}^4\varphi-2\left[\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\right]\operatorname{tang}^2\varphi+\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=0.$$

Écrivons-les sous la forme

$$A\operatorname{tang}^4\varphi+B\operatorname{tang}^2\varphi+C=0,$$
$$A'\operatorname{tang}^4\varphi+2B'\operatorname{tang}^2\varphi+C'=0;$$

le résultat de l'élimination est, comme on sait,

$$(BB' - AC' - CA')^2 = (B^2 - 4AC)(B'^2 - A'C').$$

Posons $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = \lambda$; alors

$$\begin{aligned}
&BB' - AC' - CA' \\
&= -\left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \lambda\right)(x^2 - y^2 - c^2) - x^2\left(\frac{y^2}{b^2} - \lambda\right)^2 + y^2\left(\frac{x^2}{a^2} - \lambda\right)^2 \\
&= \lambda\left[(y^2 - x^2)\lambda - (x^2 - y^2 - c^2) + \frac{c^2x^2y^2}{a^2b^2}\right] \\
&= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^4}{b^2} - \frac{x^4}{a^2} + c^2\right).
\end{aligned}$$

Quant à $B'^2 - A'C'$, on le trouve par un calcul facile égal à

$$\frac{4x^2y^2}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right),$$

de sorte que l'équation du lieu est, en supprimant le facteur $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{y^4}{b^2} - \frac{x^4}{a^2} + c^2\right)^2 \\
&\qquad = \frac{4x^2y^2}{a^2b^4}\left[(x^2 - y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4\right].
\end{aligned}$$

Le lieu, ainsi qu'on le voit, est une courbe du dixième degré. Cette équation ne permettrait pas de le construire facilement, mais on peut avoir les coordonnées x et y d'un point du lieu en fonction de l'angle φ. Voici une méthode simple. Remarquons pour cela que les deux équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{x}{\cos\varphi} - \frac{y}{\sin\varphi} &= c\lambda, \\
\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} &= \frac{c}{\lambda},
\end{aligned}\right.$$

où λ est arbitraire, représentent un point de l'hyperbole homofocale. Écrivons l'équation d'une droite passant par le point de rencontre des droites (3) :

$$(4)\qquad \frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}-c\lambda+\mu\left(\frac{x}{\cos\varphi}-\frac{y}{\sin\varphi}-\frac{c}{\lambda}\right)=0.$$

Écrivons que cette droite (4) se confond avec la tangente (1). En éliminant μ entre les deux équations de condition, nous trouverons une équation du second degré en λ ; mais $\lambda=\frac{a+b}{c}$ doit *a priori* en être racine ; et il sera par conséquent facile d'avoir l'autre racine ; cette valeur de λ substituée dans les équations (3) résoudra le problème. On trouve ainsi

$$\lambda=\frac{(a-b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{c(b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)},$$

et les équations (3) deviennent

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}&=\frac{(a-b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi},\\ \frac{x}{\cos\varphi}-\frac{y}{\sin\varphi}&=\frac{(a+b)(b\cos^2\varphi-a\sin^2\varphi)}{b\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit, par des calculs faciles,

$$x=a\cos\varphi\,\frac{b^2\cos^4\varphi+a^2\sin^4\varphi+2b^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi},$$

$$y=-b\sin\varphi\,\frac{b^2\cos^4\varphi+a^2\sin^4\varphi+2a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi}.$$

Sous cette forme, on voit que x et y sont infinis quand

$$b^2\cos^4\varphi-a^2\sin^4\varphi=0,$$

ou

$$\operatorname{tang}\varphi=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Les quatre tangentes correspondant à ces valeurs de tang φ sont donc asymptotes à la courbe, ce qui donne une propriété géométrique des points de l'ellipse correspondant à ces valeurs de φ; l'équation nous montre d'autre part que les asymptotes sont parallèles aux deux droites

$$\frac{y^2}{b} - \frac{x^2}{a} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}},$$

et, en effet, la tangente au point tang $\varphi = \sqrt{\frac{b}{a}}$ a pour coefficient angulaire

$$-\frac{b}{a}\cot\varphi = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 65

(voir 1re série, t. II, p. 326);

PAR M. A. LAISANT.

Connaissant les coordonnées des trois sommets d'un triangle, quelles relations doivent exister entre ces coordonnées et celles d'un quatrième point, pour que celui-ci soit dans l'intérieur du triangle?

Pour que le quatrième point P soit situé dans l'intérieur du triangle ABC, il faut et il suffit qu'il puisse être le centre de gravité de trois masses positives m_1, m_2, m_3, respectivement appliquées en A, B, C; nous avons donc l'équipollence, *applicable à l'espace,*

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,\mathrm{OP} \triangleq m_1\,\mathrm{OA} + m_2\,\mathrm{OB} + m_3\,\mathrm{OC}$$

ou

$$(1)\qquad \mathrm{OP} \triangleq \lambda_1\,\mathrm{OA} + \lambda_2\,\mathrm{OB} + \lambda_3\,\mathrm{OC},$$

les coefficients λ_1, λ_2, λ_3 étant positifs et assujettis à la condition

$$(2)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

En désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de A, par x_2, y_2, z_2 celles de B, par x_3, y_3, z_3 celles de C, et par ξ, η, ζ celles de P, l'équipollence (1) tient lieu des trois équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3, \\ \eta = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3, \\ \zeta = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3. \end{cases}$$

Si donc on résout ce dernier système d'équations par rapport à λ_1, λ_2, λ_3, les relations demandées consistent dans la relation (2) et dans les suivantes :

$$(4)\qquad \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire le calcul, de voir comment il se simplifie lorsqu'il s'agit d'un triangle situé dans un plan déterminé, d'étendre le problème à un tétraèdre, puis à un polygone ou à un polyèdre quelconque.

Question 505

(voir 1re série, t. XIX, p. 44);

PAR M. H. BROCARD.

On connaît les levers et les couchers du Soleil en temps moyen à Paris ; en déduire les mêmes données pour le 1er *de chaque mois de* 1860 *à Alger.*

La solution complète de cette question fait l'objet d'une

brochure in-16, de 32 pages, intitulée : « *Calendrier algérien pour* 1853, *ou tableaux du lever et du coucher du Soleil calculés pour toute l'Algérie, accompagnés de l'équation du temps*, par M. E. Renou, membre titulaire de la Commission scientifique », et aujourd'hui directeur de l'Observatoire météorologique du Parc-Saint-Maur, et secrétaire de la Société météorologique de France.

L'auteur fait précéder son travail d'une Notice explicative, dans laquelle il dit : « Notre tableau suffit pour avoir l'heure à une demi-minute près pendant vingt-cinq ou trente ans. » Ce tableau répond ainsi, d'une manière complète, à la question proposée.

Il donne :

1° Les heures du lever et du coucher du Soleil (avec les minutes et les secondes) à Alger, pour tous les jours de l'année 1853;

2° Les mêmes éléments à Oran, à Tlemcen, et à 32 degrés de latitude pour les 1er, 11 et 21 de chaque mois;

3° L'équation du temps pour tous les jours de l'année.

L'utilité de tableaux de ce genre est clairement démontrée par la possibilité qu'ils donnent :

1° De régler les montres et les horloges;

2° De régler les heures d'éclairage et de travail des ouvriers dans les villes, les administrations des chemins de fer, le service des phares, etc.;

3° De régler tous les détails de l'installation et du tracé des cadrans solaires.

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes* ne répond pas, d'une manière suffisante, à ces divers *desiderata*.

On y trouve, pages 49 et 50, une Table de corrections pour les levers et les couchers du Soleil, pour les jours

de l'année de 10 en 10, et pour les latitudes de 43 degrés à 51 degrés, qui sont les latitudes extrêmes de la France. Pourquoi un tableau d'une aussi évidente utilité n'a-t-il pas été depuis longtemps étendu à toutes les latitudes et en particulier à celle de l'Algérie, notre colonie la plus voisine de la France et aussi la plus importante ?

Quoi qu'il en soit, la solution de la question qui nous occupe réside essentiellement dans les nombres du tableau suivant :

Temps moyen d'Alger.

1er du mois.	Lever.	Coucher.
	h. m. s.	h. m. s.
Janvier	7.15. »	4.53.30
Février	7. 4. »	5.24. »
Mars	6.32.30	5.53. »
Avril	5.47.30	6.21. »
Mai	5. 7.30	6.46.30
Juin	4.44. »	7.11.30
Juillet	4.45.30	7.21. »
Août	5. 6.30	7. 5. »
Septembre	5.32. »	6.27. »
Octobre	5.56.30	5.42. »
Novembre	6.25. »	5. 2. »
Décembre	6.56. »	4.42.30

Question 1142

(voir 2e série, t. XIII, p. 303) ;

PAR M. MORET-BLANC.

Étant données deux droites non situées dans un même plan, les paraboloïdes hyperboliques qui passent par ces deux droites ont tous un plan directeur commun ; trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs passent par une troisième droite donnée non parallèle au plan des deux pre-

mières. Trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs forment avec le premier un angle donné. (DEWULF.)

J'emploie les axes et les notations de la question 1122 (*voir* 2e série, t. XIII, p. 444).

1° Soient

$$x = az, \quad y = bz$$

les équations de la troisième droite, que l'on peut, sans diminuer la généralité de la question, supposer menée par l'origine. Les coefficients A, B, C du second plan directeur satisferont à la condition

$$\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C} = 0.$$

On a trouvé, pour équation générale des hyperboloïdes passant par les deux premières droites,

$$(1) \quad \mathrm{C}mz^2 + \mathrm{B}myz + \mathrm{A}mxz - \mathrm{B}m^2cx - \mathrm{A}cy - \mathrm{C}mc^2 = 0;$$

avec les conditions, pour déterminer les sommets,

$$(2) \qquad mz(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2) - (m^2 + 1)c\mathrm{A}\mathrm{B} = 0,$$

$$(3) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + 2\mathrm{C}z = 0,$$

auxquelles il faut joindre ici

$$(4) \qquad \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C} = 0.$$

En éliminant A, B, C entre les trois premières équations, on a l'équation déjà trouvée du conoïde

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &[m^2z^3 + (m^2 + 2)c^2z]y^2 - m(m^2 + 1)(3cz^2 + c^3)xy \\ &\qquad + [m^2z^3 + (m^2 + 2m^4)c^2z]x^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'on élimine ces mêmes variables entre les équations (2), (3), (4), on obtient l'équation d'une seconde surface sur laquelle sont les sommets

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &mz[(x - 2az)^2 + (y - 2bz)^2]^2 \\ &\qquad + (m^2 + 1)c(x - 2az)(y - 2bz) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est encore un conoïde ayant pour plan directeur le plan xOy et pour axe la droite

$$x = 2az, \quad y = 2bz.$$

Le lieu cherché est l'intersection des deux conoïdes. Il sera facile d'en construire l'épure.

2° Soient A, B, C les cosinus des angles que la normale au second plan directeur fait avec les axes Ox, Oy, Oz, C étant une constante donnée.

Il faut aux équations (1), (2), (3) joindre la suivante :

$$A^2 + B^2 = 1 - C^2,$$

ou bien

$$(7) \qquad mz(1 - C^2) - (m^2 + 1)cAB = 0,$$

qui résulte de sa combinaison avec l'équation (2).

En éliminant A et B entre les trois premières, on obtient l'équation du conoïde (5).

Éliminant ces mêmes variables entre les équations (1), (3) et (7), on obtient celle d'une seconde surface sur laquelle sont les sommets :

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & mcz(1 - C^2)(y^2 - m^2x^2)^2 \\ & \quad + (m^2 + 1)(myz^2 - 2m^2cxz + mc^2y) \\ & \qquad\qquad \times (mxz^2 - 2cyzm^2cx) = 0. \end{aligned} \right.$$

Le lieu de sommets est la courbe d'intersection des surfaces (5) et (8). L'axe des z en fait évidemment partie.

Question 1154

(voir 2e série, t. XIII, p. 544);

PAR M. GAMBEY.

L'énoncé de la question 1154 se trouve dans un article publié dans ce journal, par M. Laguerre, sous le titre de « *Recherches analytiques sur la surface du*

troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner » (*voir* 2e série, t. XI, p. 342, th. II), et il y figure comme corollaire de ce qui précède. Je vais signaler les parties de cet article qui ont le rapport le plus direct avec la solution de la question proposée.

Soient a, b, c, d, e cinq fonctions linéaires de x, y, z que nous regarderons comme les coordonnées pentaédriques d'un point, et la fonction

$$u = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e,$$

où t est un paramètre variable.

Si l'on fait varier ce paramètre, le plan représenté par l'équation $u = 0$ enveloppe une surface développable du sixième ordre dont l'équation s'obtient en égalant à zéro le discriminant de u. Or ce discriminant peut s'exprimer (*voir* Salmon, *Algèbre supérieure*) en fonction des deux invariants de u. Ces invariants sont

$$i = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de la surface, enveloppe du plan $u = 0$, peut s'écrire ainsi

$$i^3 - 27j^2 = 0.$$

De la forme de cette équation on déduit que l'arête de rebroussement de cette développable, dont les équations sont

$$i = 0, \quad j = 0,$$

est l'une des asymptotiques de la surface du troisième ordre représentée par

$$j = 0.$$

Or cette surface est justement la réciproque de la surface romaine de Steiner, la surface directrice étant la quadrique représentée par $i=0$.

Cela posé, M. Laguerre démontre que le cône circonscrit à cette surface et dont le sommet est un point de cette surface se décompose en deux cônes du second ordre. Il emploie pour cela des transformations fondées sur les propriétés des invariants et des covariants; mais on peut arriver à ce résultat d'une autre manière.

Cette décomposition est, en effet, une conséquence directe de cette propriété, caractéristique de la surface de Steiner, *d'être coupée par un plan tangent quelconque suivant deux coniques,* et comme cette même surface admet *quatre plans tangents la touchant suivant des coniques doubles,* on peut ajouter que sa réciproque admet quatre points pour lesquels les cônes circonscrits, ayant ces points pour sommets, sont des cônes doubles du second ordre.

Au cours de l'article en question, on trouve ensuite démontré que la courbe de contact de chacun de ces cônes est une cubique gauche, arête de rebroussement d'une certaine développable, ε, ayant pour équation

$$ju - i\mathrm{H} = 0,$$

H étant le hessien de u, savoir

$$(at^2 + 2bt + c)(ct^2 + 2dt + e) - (bt^2 + 2ct + e)^2.$$

La forme de cette équation montre que l'asymptotique

$$i=0, \quad j=0$$

est située sur la surface ε, ce qu'il s'agissait de démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Bourguet.

Question 1157

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 95);

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Étant donné un système quelconque de points matériels et deux droites fixes dans l'espace, on demande le lieu des droites qui rencontrent les deux droites fixes et qui sont axes principaux d'inertie par rapport à un de leurs points. Lieu de ce point. On examinera, en particulier, le cas où l'une des droites fixes passe par le centre de gravité du système, et aussi le cas où l'une de ces droites est axe principal d'inertie relativement au centre de gravité. (F. DIDON.)

I.

Si la droite dont on cherche le lieu géométrique est prise pour axe des z', et si, de plus, le plan des $z'x'$ contient le centre de gravité, on sait que la condition nécessaire pour que cette droite soit un axe principal d'inertie en un de ses points est, en désignant par m la masse d'un des points matériels, par x', y', z' ses coordonnées,

$$(1) \qquad \Sigma my'z' = 0,$$

et que, si a est l'x' du centre de gravité, et h la distance à l'origine du point pour lequel l'axe des z' est principal, on a la relation

$$(2) \qquad \mathrm{M}ah = \Sigma mx'z',$$

M étant la masse totale du système. Pour plus de simplicité, je la supposerai égale à l'unité.

Avant de m'occuper de la question proposée, je vais d'abord traduire géométriquement ces deux relations

importantes. Pour cela, je rapporte le système aux trois axes principaux relatifs au centre de gravité ; les coordonnées (x', y', z') d'un point quelconque s'exprimeront en fonction des nouvelles (x, y, z) par des relations de la forme

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta,$$
$$y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta',$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'',$$

et comme, par hypothèse, le centre de gravité, qui est la nouvelle origine, était dans le plan des $z'x'$, et même si l'on veut sur l'axe des x', on en conclut

$$\delta = a, \quad \delta' = 0, \quad \delta'' = 0.$$

Les formules de transformation sont donc

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + a, \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z. \end{cases}$$

Les équations de la droite mobile (ancien axe des z') sont

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + a = 0, \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0, \end{cases}$$

et il est bien entendu que les deux systèmes d'axes coordonnés étant rectangulaires, les neuf cosinus α, β, γ, α', ... sont liés par les relations connues.

La relation (1), qui exprime que la droite est un axe principal d'inertie en un point indéterminé, peut s'écrire maintenant ainsi

$$\Sigma m(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z) = 0,$$

et, à cause du choix des axes actuels,

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0$$

Soient A, B, C les moments principaux d'inertie relatifs au centre de gravité, c'est-à-dire

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

et P le moment d'inertie polaire, ou A + B + C.

La relation précédente peut alors s'écrire

$$(P - A)\alpha'\alpha'' + (P - B)\beta'\beta'' + (P - C)\gamma'\gamma'' = 0,$$

ou, plus simplement,

$$(5) \qquad A\alpha'\alpha'' + B\beta'\beta'' + C\gamma'\gamma'',$$

en tenant compte de la relation

$$(6) \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

qui est une de celles qui lient les neuf cosinus.

Nous pouvons éliminer α', β', γ' entre la seconde des équations (4) et les équations (5) et (6); le résultat de cette élimination est

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ A\alpha'' & B\beta'' & C\gamma'' \end{vmatrix} = 0;$$

(ξ, η, ζ) désignant les coordonnées d'un point particulier de la droite mobile, ses équations peuvent se mettre sous la forme

$$(8) \qquad \frac{x - \xi}{\alpha''} = \frac{y - \eta}{\beta''} = \frac{z - \zeta}{\gamma''} = \rho;$$

si l'on élimine α'', β'', γ'' entre ces équations et la relation (7), celle-ci devient

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x - \xi & y - \eta & z - \zeta \\ A(x - \xi) & B(y - \eta) & C(z - \zeta) \end{vmatrix} = 0.$$

Or cette équation est identiquement vérifiée en faisant

$$\frac{(x-\xi)}{\rho}=p\frac{\xi}{A+\lambda},\quad \frac{(y-\eta)}{\rho}=p\frac{\eta}{B+\lambda},$$
$$\frac{(z-\zeta)}{\rho}=p\frac{\zeta}{C+\lambda},$$

ce qui montre que les cosinus des angles que fait la droite avec les axes doivent être proportionnels à

$$\frac{\xi}{A+\lambda},\quad \frac{\eta}{B+\lambda},\quad \frac{\zeta}{C+\lambda}.$$

Or, si l'on considère l'équation

$$\frac{\xi^2}{A+\lambda}+\frac{\eta^2}{B+\lambda}+\frac{\zeta^2}{C+\lambda}=1,$$

qui représente une surface homofocale de l'ellipsoïde inverse des moments, on peut énoncer le résultat précédent en disant que, *pour être axe principal d'inertie en un de ses points, la droite doit être normale à une des surfaces homofocales de l'ellipsoïde inverse des moments au point où elle rencontre cette surface.*

La seconde équation de condition (2) s'exprime en fonction des nouvelles coordonnées par l'équation

$$ah=\Sigma m(\alpha x+\beta y+\gamma z+a)(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z);$$

soient ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées du point pour lequel la droite est axe principal; la relation précédente, en tenant compte de ce que a est l'x' du centre de gravité, et h le z' du point que nous cherchons, devient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}&(\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1)(\alpha''\xi_1+\beta''\eta_1+\gamma''\zeta_1)\\&\quad=A\alpha\alpha''+B\beta\beta''+C\gamma\gamma'';\end{aligned}\right.$$

le point (ξ_1, η_1, ζ_1) étant sur la droite représentée par

les équations (8), on a

$$\alpha'' = \frac{\xi_1 - \xi}{\rho} = p\frac{\xi}{A+\lambda}, \quad \beta'' = \frac{\eta_1 - \eta}{\rho} = p\frac{\eta}{B+\lambda},$$

$$\gamma'' = \frac{\zeta_1 - \zeta}{\rho} = p\frac{\zeta}{C+\lambda};$$

en portant les valeurs de α'', β'', γ'' dans le second facteur du premier membre de l'équation (9), ce facteur devient

$$p\left(\frac{\xi\xi_1}{A+\lambda} + \frac{\eta\eta_1}{B+\lambda} + \frac{\zeta\zeta_1}{C+\lambda}\right);$$

si, au contraire, on exprime ξ_1, η_1, ζ_1 au moyen de α'', β'', γ'', on a

$$\xi_1 = \xi + \rho\alpha'' = \left[\frac{1}{p}(A+\lambda) + \rho\right]\alpha'', \ldots,$$

et le premier facteur de (9) devient, après réductions,

$$\frac{1}{p}(A\alpha\alpha'' + B\beta\beta'' + C\gamma\gamma'');$$

donc l'équation (9) devient

$$(10) \qquad \frac{\xi\xi_1}{A+\lambda} + \frac{\eta\eta_1}{B+\lambda} + \frac{\zeta\zeta_1}{C+\lambda} = 1,$$

ce qui montre que le point (ξ_1, η_1, ζ_1), qui était déjà sur la normale à la surface homofocale de l'ellipsoïde inverse des moments, est en outre dans le plan tangent à cette même surface; donc c'est le point de contact lui-même.

En d'autres termes : *Toute droite qui est un axe principal d'inertie en un de ses points est normale à une des trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde inverse des moments qui passent en ce point.*

Revenons maintenant à la question proposée.

Nous avons à exprimer qu'une droite, dont les équations sont données sous la forme (8), rencontre deux droites fixes ayant pour équations

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu},$$

$$(\mathrm{D}') \qquad \frac{x - x'_0}{\lambda'} = \frac{y - y'_0}{\mu'} = \frac{z - z'_0}{\nu'},$$

ou bien

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{array}{l} \mu z - \nu y - \lambda_0 = 0, \\ \nu x - \lambda z - \mu_0 = 0, \\ \lambda y - \mu x - \nu_0 = 0; \end{array} \right. \qquad (\mathrm{D}') \left\{ \begin{array}{l} \mu' z - \nu' y - \lambda'_0 = 0, \\ \nu' x - \lambda' z - \mu'_0 = 0, \\ \lambda' y - \mu' x - \nu'_0 = 0. \end{array} \right.$$

Désignons par X, Y, Z les trois fonctions linéaires qui forment les premiers membres des équations (D), et par X′, Y′, Z′ les fonctions analogues pour (D′).

L'équation

$$(11) \qquad \alpha'' \mathrm{X} + \mu \mathrm{Y} + \nu \mathrm{Z} = 0$$

représente évidemment un plan passant par la droite (D) et parallèle à la direction $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, à cause de la symétrie des coefficients angulaires en (λ, μ, ν) et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$; donc, si l'on convient de regarder X, Y, Z comme les résultats que l'on obtient en substituant les coordonnées d'un point quelconque de la droite mobile [de direction $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$] dans les premiers membres de (D), l'équation (11) devient une équation de condition, exprimant précisément qu'il y a rencontre entre la droite mobile et la droite (D).

Pareillement l'équation

$$(12) \qquad \alpha'' \mathrm{X}' + \beta'' \mathrm{Y}' + \gamma'' \mathrm{Z}' = 0$$

exprime la rencontre de la droite mobile et de la droite (D′).

Donc enfin, si l'on appelle Δ_x, Δ_y, Δ_z les détermi-

nants partiels que l'on peut former avec les six fonctions linéaires

$$X,\quad Y,\quad Z,$$
$$X',\quad Y',\quad Z',$$

on déduit des équations (11) et (12)

(14) $$\frac{\alpha''}{\Delta_x} = \frac{\beta''}{\Delta_y} = \frac{\gamma''}{\Delta_z};$$

si l'on porte dans l'équation (7), à la place de α'', β'', γ'', les quantités proportionnelles, il vient, pour l'équation de la droite mobile,

(14) $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \Delta_x & \Delta_y & \Delta_z \\ A\Delta_x & B\Delta_y & C\Delta_z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation, en apparence du cinquième degré, d'après la forme des Δ, est en réalité du quatrième; car, en examinant la composition de ces fonctions, on voit qu'en désignant par L, M, N les déterminants partiels des six cosinus

$$\lambda,\quad \mu,\quad \nu,$$
$$\lambda',\quad \mu',\quad \nu',$$

savoir

$$L = \begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu' & \nu' \end{vmatrix},\quad M = \begin{vmatrix} \nu & \lambda \\ \nu' & \lambda' \end{vmatrix},\quad N = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix},$$

et par V la fonction linéaire des coordonnées

$$Lx + My + Nz,$$

on verra que

$$\Delta_x = Vx + r_x,\quad \Delta_y = Vy + r_y,\quad \Delta_z = Vz + r_z,$$

r_x, r_y, r_z étant des fonctions du premier degré; donc, dans l'équation (14), on peut remplacer les Δ par les r dans les termes de la seconde ligne, et l'équation ainsi

transformée

$$(15)\qquad A\Delta_x(yr_z - zr_y) + B\Delta_y(zr_x - xr_z) + C(xr_y - yr_x) = 0$$

est bien du quatrième degré.

Dans le cas où l'une des droites fixes, (D) par exemple, passe par le centre de gravité, on a identiquement

$$(16)\qquad \frac{yr_z - zr_y}{X} = \frac{zr_x - xr_z}{Y} = \frac{xr_y - yr_x}{Z};$$

car, à cause des conditions $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 = 0$, il vient

$$r_x = \mu'_0 Z - \nu'_0 Y, \quad r_y = \nu'_0 X - \lambda'_0 Z, \quad r_z = \lambda'_0 Y - \mu'_0 X,$$

et de plus

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Or la première des équations (16) équivaut à

$$(\lambda'_0 Y - \mu'_0 X)(xX + yY + zZ) = 0,$$

ce qui est une identité, et, par suite, l'équation de la surface devient

$$(17)\qquad A\Delta_x X + B\Delta_y Y + C\Delta_z Z = 0,$$

laquelle est bien du troisième degré.

Les deux droites fixes font toujours partie du lieu. Enfin, si l'on suppose que la droite (D) soit un des axes principaux relatifs au centre de gravité, l'axe des z par exemple, il faut supposer

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad X = -y, \quad Y = x, \quad Z = 0,$$
$$\Delta_x = xZ', \quad \Delta_y = yZ', \quad \Delta_z = -(xX' + yY'),$$

et l'équation de la surface devient

$$(18)\qquad (B - A)xyZ' = 0;$$

elle représente un système de trois plans, savoir : les

deux plans principaux qui se coupent suivant la droite (D), et le plan qui projette cette droite sur le troisième plan principal.

Si, dans l'équation (15), on remplace les Δ_x, ... par leurs expressions $Vx + r_x$, ..., elle prend la forme

$$VS + T = 0, \tag{19}$$

S et T étant des fonctions du troisième degré qui se déduisent aisément du premier membre de l'équation (15). L'équation (17) prend aussi la même forme; seulement S et T sont alors du second degré, de sorte que les plans parallèles au plan $V = 0$, c'est-à-dire aux deux droites fixes, coupent la surface suivant une série de coniques.

II.

Nous avons à chercher encore *le lieu du point par rapport auquel chacune des droites mobiles est un axe principal d'inertie.*

Soient (ξ, η, ζ) les coordonnées de ce point; il résulte de considérations géométriques exposées au commencement du premier paragraphe que ces coordonnées doivent vérifier les équations suivantes :

$$\frac{\xi}{A+\lambda} : \Delta_\xi = \frac{\eta}{B+\lambda} : \Delta_\eta = \frac{\zeta}{C+\lambda} : \Delta_\zeta, \tag{20}$$

$$\frac{\xi^2}{A+\lambda} + \frac{\eta^2}{B+\lambda} + \frac{\zeta^2}{C+\lambda} = 1. \tag{21}$$

Or l'élimination de λ se fait simplement en combinant les rapports égaux et tenant compte de l'équation (21); on déduit, en désignant de nouveau par x, y, z les coordonnées d'un point du lieu,

$$\frac{\dfrac{y}{\Delta_y} - \dfrac{z}{\Delta_z}}{B - C} = \frac{\dfrac{z}{\Delta_z} - \dfrac{x}{\Delta_x}}{C - A} = \frac{\dfrac{x}{\Delta_x} - \dfrac{y}{\Delta_y}}{A - B} = \frac{1}{x\Delta_x + y\Delta_y + z\Delta_z}.$$

En ne combinant que les trois premiers rapports deux à deux, on retombe sur l'équation (15) qui représente bien un lieu du point cherché; mais, en combinant l'un de ces trois rapports ou un rapport égal à chacun d'eux avec le dernier, il vient

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &(x\Delta_x+y\Delta_y+z\Delta_z)(yr_z-zr_y+zr_x-xr_z+xr_y-yr_x)\\ &\quad=(B-C)\Delta_y\Delta_z+(C-A)\Delta_z\Delta_x+(A-B)\Delta_x\Delta_y,\end{aligned}\right.$$

équation du cinquième degré qui, combinée avec l'équation (15), fait connaître le lieu cherché.

Les droites fixes font partie du lieu ainsi que la courbe commune aux trois surfaces du second degré

$$\Delta_x=0,\quad \Delta_y=0,\quad \Delta_z=0;$$

car il est aisé de voir que tous les points communs aux deux premières appartiennent à la troisième, et que tous ces points communs appartiennent bien aux deux surfaces (15) et (22).

Note. — Autres solutions de MM. Bourguet et Moret-Blanc.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Lucas. — La question 1180, traitée dans le numéro de janvier, n'est pas résolue; rien ne prouve que les deux séries récurrentes, considérées par l'auteur, n'ont pas le même terme, en les supposant prolongées indéfiniment.

Un lecteur des *Nouvelles Annales* remarque que des fautes de calcul se sont glissées dans la solution de la question de Mécanique (même tome, p. 63). Nous reviendrons prochainement sur cette question.

THÉORIE DES INDICES;

Par M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[suite (*).]

69. *On donne deux surfaces du second degré* S, S' *et deux trièdres* $d(\lambda\mu\nu)$, $d'(\lambda'\mu'\nu')$ *correspondants par rapport à* S, *la somme*

$$\frac{I'_{\lambda\lambda'}}{I_{\lambda\lambda'}} + \frac{I'_{\mu\mu'}}{I_{\mu\mu'}} + \frac{I'_{\nu\nu'}}{I_{\nu\nu'}} = H$$

sera constante quelles que soient les arêtes $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$, *pourvu que les sommets* d, d' *restent fixes.*

Soient a, b, c les traces du trièdre d sur le plan polaire du sommet d' et a', b', c' les traces du trièdre d' sur le plan polaire du sommet d, ces plans polaires étant pris par rapport à S. Les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à cette surface, on a

$$da\,.\,d'a'\,I_{\lambda\lambda'} = I_{dd'}\,I_{aa'}.$$

D'ailleurs

$$da\,.\,d'a'\,I'_{\lambda\lambda'} = I'_{aa'}\,I'_{dd'} - I'_{ad'}\,I'_{da'};$$

par conséquent

$$\frac{I'_{\lambda\lambda'}}{I_{\lambda\lambda'}} = \frac{I'_{aa'}\,I'_{dd'}}{I_{aa'}\,I_{dd'}} - \frac{I'_{ad'}\,I'_{da'}}{I_{aa'}\,I_{dd'}},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les deux autres rapports; d'où résulte

$$H = \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}}\left(\frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bb'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cc'}}{I_{cc'}}\right) - \frac{1}{I_{dd'}}\left(\frac{I'_{ad'}\,I'_{da'}}{I_{aa'}} + \frac{I'_{bd'}\,I'_{db'}}{I_{bb'}} + \frac{I'_{cd'}\,I'_{dc'}}{I_{cc'}}\right).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481.

Ajoutons et retranchons $\left(\frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}}\right)^2$. La première parenthèse aura pour valeur la quantité K (68); la seconde, d'après (58), aura pour valeur $\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{FF'}}{I'_{FF'}}I'_{dd'}$, en désignant par F, F′ les plans polaires des sommets d', d par rapport à la surface S′. Nous déduisons de là

$$H = \frac{I'_{dd'}}{I_{dd'}}\left(K - \frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{I_{FF'}}{I'_{FF'}}\right).$$

On donne deux surfaces du second degré S, S′ *et deux triangles* abc, $a'b'c'$ *correspondants par rapport à* S′; *si l'on désigne par* α, β, γ, α', β', γ' *les côtés de ces triangles, la somme*

$$\frac{I_{\alpha\alpha'}}{I'_{\alpha\alpha'}} + \frac{I_{\beta\beta'}}{I'_{\beta\beta'}} + \frac{I_{\gamma\gamma'}}{I'_{\gamma\gamma'}} = L$$

sera constante, quels que soient les côtés de ces triangles, pourvu que leurs plans D, D′ *restent fixes.*

Soient d et d' les pôles des plans D′ et D par rapport à S′. Les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à cette surface; leurs faces étant A, B, C, D, A′, B′, C′, D′, nous avons

$$-\frac{\sin DA \sin D'A'}{\pi'^2} I'_{\alpha\alpha'} = I'_{AA'} I'_{DD'};$$

d'ailleurs

$$-\frac{\sin DA \sin D'A'}{\pi^2} I_{\alpha\alpha'} = I_{AA'} I_{DD'} - I_{AD'} I_{DA'};$$

par conséquent

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2}\frac{I_{\alpha\alpha'}}{I'_{\alpha\alpha'}} = \frac{I_{AA'} I_{DD'}}{I'_{AA'} I'_{DD'}} - \frac{I_{AD'} I_{DA'}}{I'_{AA'} I'_{DD'}},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les deux autres

rapports ; d'où résulte

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2} L = \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} \left(\frac{I_{AA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BB'}}{I'_{BB'}} + \frac{I_{CC'}}{I'_{CC'}} \right)$$
$$- \frac{1}{I'_{DD'}} \left(\frac{I_{AD'} I_{DA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BD'} I_{DB'}}{I_{BB'}} + \frac{I_{CD'} I_{DC'}}{I_{CC'}} \right).$$

Ajoutons et retranchons $\left(\frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}}\right)^2$. La première parenthèse aura pour valeur la quantité $\frac{\pi'^2}{\pi^2} K$; la seconde aura pour valeur $\frac{\pi'^2}{\pi^2} \frac{I'_{ff'}}{I_{ff'}} I_{DD'}$, les points f, f' étant les pôles des plans D' et D par rapport à S. Nous avons par conséquent

$$L = \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} \left(K - \frac{I'_{ff'}}{I_{ff'}} \right).$$

70. *On donne deux surfaces du second degré* S *et* S' *et deux tétraèdres abcd, a'b'c'd' polaires réciproques par rapport à* S. *La somme*

$$\sum \frac{I'_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = G,$$

étendue aux six couples d'arêtes correspondantes $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... *est constante, quels que soient les deux tétraèdres.*

Considérons, en effet, deux autres tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$ polaires réciproques par rapport à S'; soient ξ, ξ' deux arêtes correspondantes de ces tétraèdres, η, η' deux autres arêtes correspondantes, η étant l'arête opposée à ξ dans le tétraèdre $xyzt$, η' l'arête opposée à ξ' dans le tétraèdre $x'y'z't'$. Il suit de là que η' est la polaire de ξ et ξ' la polaire de η par rapport à S'. Or on a (57)

$$I'_{\alpha\alpha'} = \sum \frac{I'_{\alpha\xi'} I'_{\xi\alpha'}}{I'_{\xi\xi'}}, \quad I'_{\beta\beta'} = \sum \frac{I'_{\beta\xi'} I'_{\xi\beta'}}{I'_{\xi\xi'}},$$

par suite

$$G = \frac{1}{I'_{\xi\xi'}} \sum \frac{I'_{\alpha\xi'} I'_{\xi\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} + \ldots .$$

Mais (58, 3°)

$$\sum \frac{I'_{\alpha\xi'} I'_{\xi\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}} I'_{\xi\xi'};$$

donc

$$G = \frac{\pi^2}{\pi'^2} \sum \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}},$$

la somme étant étendue aux six couples d'arêtes correspondantes $\eta\eta'$, $\xi\xi'$, ... des deux tétraèdres $xyzt$, $x'y'z't'$. La quantité G est, par suite, constante, et l'on obtiendra des valeurs de cette constante en évaluant les sommes $\sum \frac{I'_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}}$ ou $\sum \frac{I_{\eta\eta'}}{I'_{\eta\eta'}}$ dans divers cas particuliers.

Détermination de G. — Considérons le tétraèdre *oefg* formé par trois diamètres conjugués *oe*, *of*, *og* de la surface S, les points *e*, *f*, *g* étant à l'infini. Par rapport à cette surface, ce tétraèdre se confond avec son polaire, de sorte que

$$G = \sum \frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \sum \frac{I'_\varphi}{I_\varphi},$$

ε désignant l'une des arêtes de ce tétraèdre qui passe par le centre *o*, et φ l'une des arêtes situées à l'infini. Or (12)

$$I'_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon'^2} - (o', \varepsilon)^2 I'_{E'}, \quad I_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2},$$

ε′ désignant le demi-diamètre de S′ parallèle à ε, (o', ε) la distance du centre o' à cette droite et E′ le plan diamétral de S′ qui passe par ε; ε est le demi-diamètre de S dirigé suivant ε; de là résulte

$$\sum \frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} = \sum \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} + \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 I'_{E'}.$$

Considérons maintenant une des arêtes φ, on a

$$I'_\varphi = I'_{\varphi'_0} - (o', \varphi)^2 I'_{F'}, \quad I_\varphi = I_{\varphi_0} - (o, \varphi)^2 I_F;$$

φ_0 et φ'_0 sont les directions des diamètres de S et S′ parallèles à φ. F et F′ les plans diamétraux de ces surfaces qui passent par φ; il suit de là que, quand la droite φ est à l'infini,

$$\frac{I'_\varphi}{I_\varphi} = \frac{I'_{F'}}{I_F},$$

par conséquent

$$G = \sum \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon'^2} + \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 I'_{E'} + \sum \frac{I'_{F'}}{I_F};$$

chaque signe somme contient trois termes.

71. Prenons pour la surface S′ une sphère de rayon R

$$I'_{E'} = I'_{F'} = -\frac{1}{R^4},$$

par conséquent

$$G = \frac{S_1^2}{R^2} - \frac{1}{R^4} \sum \varepsilon^2 (o', \varepsilon)^2 - \frac{1}{R^4} \sum \frac{1}{I_F},$$

S_1^2 représentant la somme des carrés des demi-axes de la surface S.

D'autre part (24),

$$I'_{\alpha\alpha'} = -\frac{\cos(\alpha, \alpha')}{R^2} + \frac{(o', \alpha)(o', \alpha')}{R^4} \cos \mathcal{A},$$

$\mathcal{A}$ désignant l'angle formé par les deux plans diamétraux $o'\alpha$, $o'\alpha'$; par conséquent, on a aussi

$$G = \sum \frac{I'_{\alpha\alpha'}}{I_{\alpha\alpha'}} = -\frac{1}{R^2} \sum \frac{\cos(\alpha, \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}} + \frac{1}{R^4} \sum \frac{(o', \alpha)(o', \alpha') \cos \mathcal{A}}{I_{\alpha\alpha'}}.$$

Ces deux valeurs de G étant égales, quel que soit le

rayon R de la sphère, si l'on suppose R infini, on obtient ce théorème :

Deux tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une surface du second degré S, *si l'on désigne par* α, α' *deux arêtes correspondantes, la somme*

$$\sum \frac{\cos(\alpha, \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}}$$

relative aux six couples d'arêtes correspondantes est égale et de signe contraire à la somme des carrés des demi-axes de la surface.

72. Dans le théorème (b) (68), supposons que la surface S' est une sphère de rayon R; si nous désignons par $P_{aa'}$ la puissance du point o' par rapport à la sphère qui a pour diamètre aa', on sait que

$$I'_{aa'} = \frac{P_{aa'}}{R^2} - 1,$$

de sorte que

$$K = \sum \frac{I'_{aa'}}{I_{aa'}} = \frac{1}{R^2} \sum \frac{P_{aa'}}{I_{aa'}} - \sum \frac{1}{I_{aa'}};$$

or (60)

$$\sum \frac{1}{I_{aa'}} = -1,$$

d'où résulte, à cause de la valeur 1° de la constante K,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - I'_0 R^2 = R^2 + \sum \frac{P_{aa'}}{I_{aa'}};$$

mais

$$I'_0 = \frac{\overline{oo'}^2}{R^2} - 1;$$

donc :

Deux tétraèdres abcd, a' b' c' d' étant polaires réciproques par rapport à la surface S, *sur les segments correspondants aa', bb', cc', dd' pris pour diamètres on*

décrit des sphères; si l'on désigne par $P_{aa'}$, $P_{bb'}$, . . . *les puissances d'un point arbitraire* o' *par rapport à ces sphères, on a la relation*

$$\frac{P_{aa'}}{I_{aa'}}+\frac{P_{bb'}}{I_{bb'}}+\frac{P_{cc'}}{I_{cc'}}+\frac{P_{dd'}}{I_{dd'}}=\overline{S}_1^2-\overline{oo'}^2,$$

S_1^2 *désignant la somme des carrés des demi-axes de la surface* S.

73. Si l'on prend pour le point o' le centre de la sphère orthogonale aux quatre sphères aa', bb', cc', dd', ce point aura la même puissance par rapport à ces quatre sphères, et cette puissance sera égale au carré du rayon R_1 de la sphère orthogonale

$$P_{aa'}=P_{bb'}=\ldots=R_1^2;$$

comme d'ailleurs

$$\frac{1}{I_{aa'}}+\frac{1}{I_{bb'}}+\ldots=-1,$$

nous avons

$$-R_1^2=S_1^2-oo'^2,\quad S_1^2=oo'^2-R_1^2.$$

Lorsque deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S, *la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère orthogonale aux quatre sphères qui ont pour diamètres les segments correspondants.*

Ce théorème n'est du reste qu'un cas particulier du suivant. Remarquons que la constante K du théorème (b) est nulle lorsque les quatre couples aa', bb', cc', dd' sont conjugués par rapport à la surface S', puisque alors

$$I'_{aa'}=I'_{bb'}=I'_{cc'}=I'_{dd'}=0.$$

Nous dirons que la surface S' *est conjuguée aux quatre*

couples de points correspondants aa', bb', cc', dd' lorsque ces conditions seront remplies.

En ayant égard à la valeur 1° de la constante K, nous aurons ce théorème :

74. *Lorsque deux tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$ *sont polaires réciproques par rapport à la surface* S, *si l'on trace une seconde surface* S' *conjuguée aux quatre couples de points correspondants* aa', bb', cc', dd', *l'indice du centre de* S *par rapport à* S' *sera égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de* S *par les diamètres de* S' *respectivement parallèles.*

Si l'on prend pour S' une sphère, on retombe sur le théorème énoncé ci-dessus. Lorsque S est une sphère, on a celui-ci :

75. *Deux tétraèdres étant polaires réciproques par rapport à une sphère, si l'on trace une seconde surface* S' *conjuguée aux quatre couples de sommets correspondants de ces tétraèdres, la somme des carrés des inverses des demi-axes de* S' *est égale à l'indice du centre de la sphère par rapport à* S' *divisé par le carré du rayon de la sphère.*

76. Considérons les deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ polaires réciproques par rapport à la surface S, ainsi que la sphère S' orthogonale aux quatre sphères qui ont pour diamètres les segments correspondants aa', bb', cc', dd'. D'après le théorème, cette sphère S' coupe orthogonalement la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces touchent la surface S. Soit m un point de la courbe d'intersection de la surface S avec la sphère S'; appelons φ et θ les angles que forme le demi-diamètre om

de S avec cette surface et avec la sphère S'. Le point o' étant le centre de cette sphère et r son rayon, on a

$$\overline{oo'}^2 = r^2 + S_1^2,$$

S_1^2 désignant la somme des carrés des demi-axes de S. Le triangle omo' donne

$$\overline{oo'}^2 = \overline{om}^2 + r^2 - 2r.om \cos omo' = \overline{om}^2 + r^2 + 2r.om \sin\theta;$$

par conséquent

$$S_1^2 - \overline{om}^2 = 2r.om \sin\theta.$$

Mais, si ρ et ρ' sont les rayons de courbure principaux de la surface S au point m, M le plan tangent à cette surface au point m, on sait que

$$\rho + \rho' = \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{(o, \text{M})};$$

d'où, à cause de la relation précédente,

$$\rho + \rho' = \frac{2r.om \sin\theta}{(o, \text{M})} = 2r\frac{\sin\theta}{\sin\varphi},$$

puisque

$$(o, \text{M}) = om \sin\varphi.$$

Prolongeons le demi-diamètre om en n, où il rencontre de nouveau la sphère S', on a

$$mn = 2r \sin\theta;$$

menons au point n un plan perpendiculaire à omn, et soit p le point où ce plan coupe la normale au point m de la surface S, on a

$$mn = mp \sin\varphi,$$

et, par suite,

$$mp = \frac{mn}{\sin\varphi} = 2r\frac{\sin\theta}{\sin\varphi};$$

il en résulte que mp représente la somme des rayons de courbure $\rho + \rho'$.

On donne une surface du second degré S *et une sphère* S′ *qui coupe orthogonalement la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces touchent* S. *Le point* m *étant un point d'intersection des surfaces* S *et* S′, *tracez le diamètre* om *de* S *et soit* n *le point où ce diamètre rencontre de nouveau la sphère* S′. *Le plan mené au point* n *perpendiculairement à ce diamètre coupera la normale en* m *de la surface en un point* p *tel que la longueur* mp *est égale à la somme des rayons de courbure principaux de la surface* S *au point* m.

Il suit de là que, si la sphère S′ touche la surface S au point m, son diamètre sera égal à la somme des rayons de courbure principaux de la surface au point m.

77. Considérons deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ polaires réciproques par rapport à la surface S. D'après la relation (c), le point o' étant le centre d'une seconde surface S′ du second degré, on a

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = \left(\frac{\alpha'^2}{\alpha^2} + \frac{\beta'^2}{\beta^2} + \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} - I_{o'}\right)\frac{\pi^2}{\pi'^2};$$

α', β', γ' sont trois demi-diamètres conjugués de S′; α, β, γ les demi-diamètres de S respectivement parallèles. Prenons pour S′ une sphère de rayon R,

$$I'_{AA'} = \frac{(o', A)(o', A')}{R^6} - \frac{\cos(A, A')}{R^4};$$

par conséquent

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = \frac{1}{R^6}\sum \frac{(o', A)(o', A')}{I_{AA'}} - \frac{1}{R^4}\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}}.$$

Or (55)

$$\sum \frac{(o', A)(o', A')}{I_{AA'}} = - \pi^2 I_{o'},$$

d'où résulte

$$\sum \frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}} = - \frac{\pi^2}{R^6} I_{o'} - \frac{1}{R^4} \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}},$$

et par suite, en désignant par $\frac{1}{S^2}$ la somme des carrés des inverses des demi-axes de S,

$$- \frac{\pi^2}{R^6} I_{o'} - \frac{1}{R^4} \sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = \frac{\pi^2}{R^4} \frac{1}{S^2} - \frac{\pi^2}{R^6} I_{o'}.$$

On donne deux tétraèdres polaires réciproques par rapport à une surface S; *la somme* $\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}}$, *que l'on obtient en divisant le cosinus de l'angle formé par chaque couple de faces correspondantes par l'indice du système de ces faces, est égale et de signe contraire à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface* S.

78. La notion de la sphère adjointe au système de deux plans permet de donner un énoncé différent à ce théorème, exprimé par la relation

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = - \frac{\pi^2}{S^2}.$$

Construisons les sphères adjointes aux quatre systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD', relatives à un point arbitraire f, ainsi que la sphère orthogonale à ces quatre sphères. Soit m le centre de cette dernière; la puissance de ce point par rapport à l'une quelconque des quatre sphères est égale au carré du rayon R_1 de la sphère orthogonale; mais, à l'aide de la relation (66), nous pouvons obtenir une autre expression de cette

puissance. Ainsi, par rapport à la sphère adjointe au système des plans AA′, nous devons avoir

$$\left(R_1^2 - \overline{fm}^2\right)\cos(A, A') = -(f, A)(f, A') + (f, A)(m, A') + (f, A')(m, A).$$

Comme d'ailleurs $\overline{fm}^2 - R_1^2$ représente la puissance P_f du point f par rapport à la sphère orthogonale, nous avons

$$\cos(A, A') = \frac{1}{P_f}[(f, A)(f, A') - (f, A)(m, A') - (f, A')(m, A)],$$

et l'on aurait des expressions analogues pour cos(B, B′), cos(C, C′), cos(D, D′).

De là résulte

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = \frac{1}{P_f}\left[\sum \frac{(f, A)(f, A')}{I_{AA'}} - \sum \frac{(f, A)(m, A')}{I_{AA'}} - \sum \frac{(f, A')(m, A)}{I_{AA'}}\right].$$

Or (55)

$$\sum \frac{(f, A)(f, A')}{I_{AA'}} = -\pi^2 I_f,$$

$$\sum \frac{(f, A)(m, A')}{I_{AA'}} = \sum \frac{(f, A')(m, A)}{I_{AA'}} = -\pi^2 I_{f_m};$$

donc

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{I_{AA'}} = \frac{\pi^2}{P_f}(-I_f + 2I_{f_m}) = -\frac{\pi^2}{S^2}$$

ou bien

$$I_f - 2I_{f_m} = \frac{P_f}{S^2}.$$

Soit F le plan polaire du point f par rapport à la surface S, on a

$$\frac{I_{mf}}{I_f} = \frac{(m, F)}{(f, F)}.$$

Si g est le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur le plan F,

$$(m, \mathrm{F}) = mg \cos fgm,$$

de sorte que

$$\frac{2\mathrm{I}_{mf}}{\mathrm{I}_f} = \frac{2\,mg.fg\cos fgm}{\overline{fg}^2}$$

et

$$\frac{\mathrm{P}_f}{\mathrm{S}^2} = \mathrm{I}_f\left(1 - \frac{2\,mg.fg\cos fgm}{\overline{fg}^2}\right).$$

Le triangle fmg donne

$$\overline{mf}^2 = \overline{mg}^2 + \overline{fg}^2 - 2\,mg.fg\cos fgm;$$

par conséquent

$$\frac{\mathrm{P}_f}{\mathrm{S}^2} = \mathrm{I}_f\left(1 - \frac{\overline{mg}^2 + \overline{fg}^2 - \overline{mf}^2}{fg^2}\right) = \mathrm{I}_f\left(\frac{\overline{mf}^2 - \overline{mg}^2}{\overline{fg}^2}\right).$$

Or, si l'on désigne par P_g la puissance du point g par rapport à la sphère orthogonale dont le centre est au point m,

$$\overline{mf}^2 - \overline{mg}^2 = \mathrm{P}_f - \mathrm{P}_g,$$

et par suite

$$\frac{1}{\mathrm{S}^2} = \frac{\mathrm{I}_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{\mathrm{P}_g}{\mathrm{P}_f}\right);$$

par conséquent :

Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S *du second degré ; on construit par rapport à un point arbitraire f les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants* AA′, BB′, CC′, DD′ *et la sphère orthogonale à ces quatre sphères. Si l'on désigne par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur son plan polaire (relatif à la surface* S*), la somme des carrés des inverses des demi-axes*

de la surface sera donnée par l'expression

$$\frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1-\frac{P_g}{P_f}\right),$$

dans laquelle P_g *et* P_f *sont les puissances des points g et f par rapport à la sphère orthogonale.*

Lorsque le point f se confond avec le centre de la surface S, son plan polaire est à l'infini :

$$\frac{1}{\overline{fg}^2}=0,\quad \frac{P_g}{\overline{fg}^2}=1 \quad \text{et} \quad I_f=-1.$$

79. *Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface* S *du second degré ; on construit par rapport au centre de la surface les quatre sphères adjointes aux systèmes des plans correspondants et la sphère orthogonale à ces quatre sphères ; la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface sera égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à la sphère orthogonale.*

80. D'après le théorème (68), si nous considérons quatre couples de plans correspondants AA′, BB′, CC′, DD′ par rapport à la surface S, déterminant les tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ polaires réciproques à cette surface, on a, I′ désignant les indices pris par rapport à une seconde surface S′,

$$\frac{\pi'^2}{\pi^2}\sum\frac{I'_{AA'}}{I_{AA'}}=\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}+\frac{\beta'^2}{\beta^2}+\frac{\gamma'^2}{\gamma^2}-I_{o'};$$

α', β', γ' sont trois demi-diamètres conjugués de S′ ; α, β, γ les demi-diamètres de S parallèles, et o' le centre de S′.

Le premier membre de cette relation est nul lorsque

les quatre couples de plans AA', BB', CC', DD' sont conjugués par rapport à la surface S', puisqu'alors

$$I'_{AA'} = I'_{BB'} = I'_{CC'} = I'_{DD'} = 0.$$

Nous dirons dans ce cas que la surface S' est conjuguée aux quatre couples de plans AA', BB', CC', DD'. On a donc ce théorème :

Deux tétraèdres sont polaires réciproques par rapport à une surface S; *si l'on trace une seconde surface* S' *conjuguée aux quatre couples de faces correspondantes, l'indice du centre de* S' *par rapport à* S *sera égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de* S' *par les diamètres de* S *respectivement parallèles.*

Comme conséquences des théorèmes précédents, nous indiquerons les deux suivants, qui nous seront utiles dans la suite. Leurs démonstrations directes sont d'ailleurs des plus faciles.

81. *On donne une surface du second degré* S *et deux points* d, d' ; *par le point* d *on mène trois plans rectangulaires* A, B, C, *et par le point* d' *trois plans* A', B', C' *parallèles aux premiers, la somme*

$$I_{AA'} + I_{BB'} + I_{CC'}$$

est constante quelle que soit la direction des trois plans : la constante a pour valeur $\frac{P_o - S_1^2}{\pi^2}$, P_o *étant la puissance du centre* o *de la surface* S *par rapport à la sphère qui a pour diamètre* dd', S_1^2 *la somme des carrés des demi-axes de* S, *et* π^2 *le produit des carrés de ces mêmes demi-axes.*

Imaginons la sphère S' de rayon r, qui a pour centre

le point d, et soit D le plan polaire du point d' par rapport à cette sphère; le tétraèdre ABCD aura pour polaire A'B'C'D', le plan D' étant à l'infini. Nous avons donc

$$\frac{I_{AA'}}{I'_{AA'}} + \frac{I_{BB'}}{I'_{BB'}} + \frac{I_{CC'}}{I'_{CC'}} + \frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} = \frac{r^6}{\pi^2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{r^2} - I'_o\right);$$

mais

$$I'_{AA'} = I'_{BB'} = I'_{CC'} = -\frac{1}{r^4}, \quad I_{DD'} = \frac{(o, D')(o, D)}{\pi^2},$$

$$I'_{DD'} = \frac{(d, D)(d', D')}{r^6},$$

de sorte que, le plan D' étant à l'infini,

$$\frac{I_{DD'}}{I'_{DD'}} = \frac{r^6}{\pi^2}\frac{(o, D)}{(d, D)};$$

de là résulte la relation

$$\pi^2(I_{AA'} + I_{BB'} + I_{CC'}) = -S_1^2 + r^2\left[I'_o + \frac{(o, D)}{(d, D)}\right];$$

mais

$$\frac{(o, D)}{(d, D)} = -I'_{od'},$$

et, puisque $I'_{do} = I'_{dd'} = -1$, on peut écrire

$$I'_o + \frac{(o, D)}{(d, D)} = -\begin{vmatrix} I'_{oo} & I'_{od'} \\ I'_{do} & I'_{dd'} \end{vmatrix} = -od.od' I'_{\delta\delta'},$$

δ et δ' désignant les directions od, od'; or, dans la sphère,

$$I'_{\delta\delta'} = -\frac{\cos(\delta, \delta')}{r^2},$$

et, comme $od.od'\cos(\delta, \delta')$ est la puissance du point o par rapport à la sphère qui a pour diamètre dd', le théorème est démontré.

Corollaire. — *On donne une surface du second degré* S *et un point* d; *si par ce point on mène trois plans rectangulaires* A, B, C, *on a*

$$I_A + I_B + I_C = \frac{\overline{od}^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

o *étant le centre de la surface.*

La somme des indices est nulle lorsque $\overline{od}^2 = S_1^2$, c'est-à-dire lorsque le point d est sur la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à la surface S.

(A suivre.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1196

(voir 2e série, t. XV, p. 144);

Par M. MEYL,

Ancien capitaine d'artillerie, à la Haye.

Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(x+1)^y = x^{y+1} + 1.$$

Nous distinguerons deux cas, suivant que y est un nombre impair ou pair.

1° y *un nombre impair.* — Mettons l'équation sous la forme

$$(x+1)^y = [(x+1) - 1]^{y+1} + 1;$$

on aura, en développant le second membre et désignant par P un polynôme entier en $x+1$,

$$(x+1)^y = P(x+1) + 2.$$

ce qui montre que $x+1$ est diviseur de 2 et par suite x est 0 ou 1. En substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on trouve que, pour $x=0$, y prend pour valeurs tous les nombres impairs et, pour $x=1$, la valeur 1.

2° *y un nombre pair.* — Par le développement de l'équation donnée, on obtient, toutes réductions faites et désignant par P un polynôme entier en x,

$$Px+y=x^y,$$

ce qui prouve que x doit être un diviseur de y.

Mettons encore l'équation sous la forme

$$(x+1)^y=[(x+1)-1]^{y+1}+1;$$

développons le second membre, réduisons et nommons P un polynôme entier en $x+1$; nous obtiendrons

$$(x+1)^{y-1}=P(x+1)+(y+1);$$

par conséquent $x+1$ doit être un diviseur de $y+1$.

Comme $\frac{y}{x}$ et $\frac{y+1}{x+1}$ sont des nombres entiers, leur différence l'est encore; posant donc $\frac{y}{x}-\frac{y+1}{x+1}=E$, on trouvera

$$\frac{y}{x}=E(x+1)+1.$$

Mettons maintenant l'équation proposée sous la forme

$$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{y}{x}}=x+\frac{1}{x^y},$$

et observons que le premier membre a pour limite inférieure $2^{\frac{y}{x}}$; on aura évidemment

$$2^{\frac{y}{x}}\leqq x+\frac{1}{x^y},$$

et, en mettant pour $\frac{y}{x}$ la valeur trouvée plus haut.

$$2^{\frac{y}{x}} = (1+1)^{E(x+1)+1}$$
$$= \left[1 + E(x+1) + 1 + \left\{\begin{array}{l}\text{des nombres positifs}\\ \text{facteurs de E}\end{array}\right.\right] < x + \frac{1}{x^x},$$

relation qui ne peut subsister que pour $E = 0$.

D'après cela, on obtient $y = x$ et par suite

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x + \frac{1}{x^x},$$

équation dont on déduit sans peine $e > x$, e étant la base du système des logarithmes népériens; x ne peut donc avoir que les valeurs 0 et 2. La première donne pour valeur de y tous les nombres pairs, la deuxième le nombre 2.

3° *En résumant*, on ne trouve donc que les solutions suivantes :

$x = 0$ avec y quelconque,
$x = 1$ » $y = 1$,
$x = 2$ » $y = 2$.

Note. — Autre solution de M. Moret-Blanc et de M. G. Fontaine, élève du collége d'Annecy.

Question 1199

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 190);

PAR M. H. JACOB.

Enveloppe de la polaire d'un point par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère. (GAMBEY.)

On pourrait déduire la solution du lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques passant par quatre points, en se servant de la méthode des polaires réci-

proques. On peut y arriver directement. Soit, en coordonnées trilinéaires, l'équation d'une conique

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = 0.$$

La condition

(1) $$\frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c} = 0$$

exprime qu'elle est tangente aux quatre droites

$$l\alpha \pm m\beta \pm n\gamma = 0.$$

Soient $(\alpha', \beta', \gamma')$ le point donné, $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$ sa polaire; en identifiant cette équation avec

$$a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma' = 0,$$

on a

$$a = \frac{\lambda}{\alpha'}, \quad b = \frac{\mu}{\beta'}, \quad c = \frac{\nu}{\gamma'}.$$

En substituant dans la relation (1), on a

$$\frac{l^2\alpha'}{\lambda} + \frac{m^2\beta'}{\mu} + \frac{n^2\gamma'}{\nu} = 0,$$

qui est l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée. Cette équation représente une conique inscrite dans le triangle formé par les diagonales du quadrilatère donné.

Note. — La même question a été résolue par MM. L. Thévenin, élève de l'institution Massin; Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; L. Bourguet; C. Chadu; Leloutre et Portail, élèves du lycée de Lille; B. Launoy; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Barthe et Clautrier, élèves du lycée de Poitiers; H. Lez; Biard, élève du lycée de Lille; Barbarin, élève de l'École Normale; Cl. Talon, élève du lycée de Moulins; A. Minozzi, à Naples. M. Minozzi nous a également adressé la solution de la question 1201 et celle de la question 1205.

Question 1200

(voir 2e série, t. XV, p. 190);

PAR M. MORET-BLANC.

Lieu des points de contact des tangentes parallèles à une droite donnée, menées aux coniques inscrites dans un quadrilatère donné. (GAMBEY.)

Prenons la direction donnée pour celle de l'axe des x. On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant le paramètre μ entre l'équation générale des coniques

$$\mu^2 A^2 - \mu(A^2 + B^2 - C^2) + B^2 = 0,$$

et sa dérivée par rapport à x

$$\mu^2 A\cos\alpha - \mu(A\cos\alpha + B\cos B - C\cos\gamma) + B\cos\beta = 0,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} & A(A\cos\beta - B\cos\alpha)(C\cos\alpha - A\cos\gamma) \\ & + B(B\cos\gamma - C\cos\beta)(A\cos\beta - B\cos\alpha) \\ & + C(C\cos\alpha - A\cos\gamma)(B\cos\gamma - C\cos\beta) = 0, \end{aligned}$$

équation d'une courbe du troisième ordre.

Elle passe par le point de rencontre de chaque côté du triangle des diagonales avec la parallèle à l'axe des x menée par le sommet opposé.

On a en outre les solutions

$$A^2 = 0, \quad B^2 = 0, \quad C^2 = 0,$$

qui correspondent à $\mu = \infty$, $\mu = 0$, $\mu = 1$, et qui représentent trois coniques infiniment aplaties, inscrites au quadrilatère; toute droite les coupe en deux points réunis en un seul.

Note. — La même question a été résolue par MM. H. Jacob,

L. Bourguet; C. Chadu; B. Launoy; Barbarin, élève de l'École Normale. Biard, élève du lycée de Lille.

Question 1207

(voir 2e série, t. XV, p. 240);

PAR M. DEWULF.

On joint les trois sommets A, B, C *d'un triangle à un point* P_1, *et l'on prend les intersections* A', B', C' *des lignes de jonction avec les côtés opposés; trouver le lieu des points* P_1 *de telle sorte que les perpendiculaires élevées sur les côtés aux points* A', B', C' *se coupent en un même point* P_2. *Ce lieu est une cubique dont il est facile de déterminer seize points et trois tangentes; déterminer les asymptotes et trouver aussi le lieu des points* P_2. (E. LUCAS.)

Ne considérons d'abord que les sommets B, C du triangle avec leurs côtés opposés. D'après la construction indiquée, à tout point L du plan correspond un seul point L'. Si le point L parcourt une droite l, les perpendiculaires aux côtés b, c du triangle forment deux faisceaux projectifs (homographiques) et les rayons correspondants se coupent sur une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires, l'une à b, l'autre à c.

Ainsi à un point L du plan correspond un seul point L' et à une droite l correspond une conique.

On arrive à la même conclusion, si l'on ne considère que les sommets A et C avec leurs côtés opposés, ou les sommets A et B avec les côtés a et b.

Donc, à toute droite l du plan correspondent trois coniques que l'on obtient en employant successivement les trois combinaisons deux à deux des sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés. Ces coniques ont leurs asymptotes perpendiculaires à b et c, à b et a,

à c et a; elles ont donc, deux à deux, un point commun à l'infini, et les trois autres points communs à deux d'entre elles appartiennent aussi à la troisième.

Sur toute droite l, il existe donc trois points qui satisfont à la question; en d'autres termes, le lieu des points P_1 est une cubique.

On verrait de la même manière que le lieu des points P_2 est aussi une cubique.

Avant de passer à la détermination de points particuliers, nous dirons quelques mots des coniques dont il vient d'être question.

Chaque combinaison de deux sommets du triangle donné avec leurs côtés opposés donne lieu à une transformation biquadratique (*Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 143). Ainsi, en n'employant que les sommets B et C avec leurs côtés opposés b et c, à tout point L du plan correspond un seul point L' et à toute droite l correspond une conique. Mais deux points déterminent une droite; donc deux points doivent suffire pour déterminer la conique correspondante, c'est-à-dire qu'à toutes les droites du plan correspondent toutes les coniques d'un réseau. Ces coniques ont trois points communs: ce sont les points *fondamentaux* de la transformation. Dans le cas qui nous occupe, ces points sont : le point H_2, intersection des perpendiculaires à AB au point B et à AC au point C, et les deux points à l'infini de ces perpendiculaires.

Les points doubles de cette transformation, c'est-à-dire les points L qui se confondent avec leur point correspondant, sont les sommets A, B, C du triangle donné et le point de rencontre D de ses hauteurs. Ces points doubles se trouvent de la manière suivante : aux droites qui passent par un point L correspondent les coniques qui passent par le point correspondant L'. Ces coniques forment un faisceau projectif au faisceau de droites L.

Le lieu des points d'intersection des rayons L avec leurs coniques correspondantes forme une cubique. De même le lieu des points d'intersection du rayon d'un faisceau M avec leurs coniques correspondantes forme une autre cubique. Ces deux cubiques se coupent en neuf points : les trois points fondamentaux et les deux points d'intersection du rayon LM commun aux deux faisceaux de droites avec la conique correspondante sont au nombre de ces neuf points, les quatre autres sont les points doubles cherchés (*). Pour la détermination graphique de ces points doubles, il ne faut pas employer des points quelconques L et M, mais bien les deux points particuliers B et C; les deux cubiques sont formées alors par les droites AC, BD, BH_2 et AB, CD, CH_2.

Si l'on fait les transformations qui résultent de l'emploi des sommets B et A, ou C et A, on obtient encore les mêmes points doubles et les points fondamentaux des trois transformations sont les points H_2, M_2, L_2 (H_2 est l'intersection des perpendiculaires à AC en C et à AB en B; M_2 est l'intersection des perpendiculaires à CB en B et à CA en A, et L_2 est l'intersection des perpendiculaires à BC en C et à BA en A), avec les points à l'infini sur les perpendiculaires à a, b, c.

Si l'on fait la construction inverse, par laquelle on déduit P_1 de P_2, on obtient encore trois transformations dont les points doubles sont aussi A, B, C, D et dont les points fondamentaux sont A, B, C, F_1, G_1, K_1 (F_1, G_1, K_1 sont les sommets du triangle que l'on obtient en menant par chacun des sommets de ABC une parallèle au côté opposé).

(*) La démonstration est tout à fait analogue à celle que donne M. Chasles pour la détermination des points doubles de deux figures homographiques (*Géométrie supérieure*, n° 561).

Ces points fondamentaux et doubles appartiennent aux courbes P_1 et P_2, comme nous allons le voir. La détermination de quelques points particuliers n'offrant pas de difficultés, nous allons les indiquer dans un tableau à deux colonnes qui donnera la correspondance des points des deux courbes.

Courbe des points P_1.		*Courbe des points* P_2.	
Les sommets du triangle donné....	A	Les sommets du triangle donné.. ..	A
Id.	B	Id.	B
Id.	C	Id.	C
Le point de rencontre des hauteurs.	D	Le point de rencontre des hauteurs..	D
Le point de rencontre des médianes.	E_1	Le centre du cercle circonscrit......	E_2
Les sommets du triangle $G_1\,F_1\,K_1$:			
	G_1	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AC menée par E_2 (asymptote de P_2).	
	F_1	Le point à l'infini de la perpendiculaire à BC menée par E_2 (asymptote).	
	K_1	Le point à l'infini de la perpendiculaire à AB menée par E_2 (asymptote).	
Le pied de la perpendiculaire abaissée de			
H_2 sur BC	H_1	H_2	
I_2 sur AC	I_1	I_2	
M_2 sur AB	M_1	M_2	
Les points d'intersection des droites qui joignent les sommets aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit ou avec un des cercles exinscrits :		Les centres des cercles inscrits et exinscrits.	
	O_1	O_2	
	O'_1	O'_2	
	O''_1	O''_2	
	O'''_1	O'''_2	

Les tangentes en F_1, G_1, K_1 sont les droites AF_1, BG_1, CK_1.

Les asymptotes de la courbe P_1 peuvent se trouver des deux manières suivantes :

1° Soit P_2 un point de la courbe P_2 qui correspond à un point à l'infini de P_1 ; abaissons les perpendiculaires

P_2B' sur AC et P_2C' sur AB. Les droites BB′ et CC′ doivent être parallèles ; donc

$$AB'.AC' = AB.AC = \text{const.}$$

La droite B′C′ enveloppe donc une hyperbole tangente à BC et ayant AB et AC pour asymptotes ; par suite P_2 engendre une hyperbole déterminée par les deux faisceaux projectifs dont les rayons sont respectivement perpendiculaires à AB et à AC. Cette courbe passe donc par H_2 et a pour asymptotes AI_2, AM_2.

Si l'on employait la transformation A, C, on obtiendrait pour le lieu des points P_2 une hyperbole ayant pour asymptotes BH_2, BM_2 et passant par I_2. Ces deux hyperboles ont un point commun à l'infini ; elles se coupent en trois autres points qui sont les points de la courbe P_2 qui correspondent aux points à l'infini de la courbe P_1.

2° Soit Cx une des trois directions cherchées. Traçons Bx parallèle à Cx ; par B′ et C′ élevons une perpendiculaire à AC et AB. Ces perpendiculaires se coupent en un point qui engendre une conique quand la direction Cx varie. Cette conique n'est autre que celle qui correspond à la droite de l'infini dans la transformation BC. Les transformations AC et AB donnent aussi chacune une conique. Ces trois coniques ont, deux à deux, un des sommets du triangle en commun ; les trois autres points d'intersection sont communs aux trois coniques et donnent les trois directions cherchées.

Remarque I. — Les points H_2, I_2, M_2 appartiennent à la circonférence circonscrite à ABC, et ces six points sont les intersections de la cubique P_2 avec cette circonférence.

Remarque II. — Les points A, B, C, D sont communs aux deux courbes P_1, P_2.

Remarque III. — On peut généraliser le problème et opérer sur trois points A, B, C, et trois droites quelconques a, b, c.

Note. — Solutions analytiques par MM. Moret-Blanc; L. Bourguet; P. Sondat.

Question 1209

(voir 2e série, t. XV, p. 240);

PAR M. LOUIS THUILLIER,
Élève du lycée d'Amiens.

Deux ellipses sont concentriques; on leur mène une tangente commune, et l'on joint au centre les points de contact; ces deux droites et les cordes communes qui passent par le centre forment un faisceau harmonique.

(MANNHEIM.)

D'après le théorème de Desargues, les deux ellipses et le système des cordes communes passant par le centre déterminent sur la tangente commune aux deux ellipses une involution, dont les points doubles sont les points de contact. Les points doubles étant conjugués par rapport à deux points homologues quelconques, le faisceau formé des cordes communes et des droites allant du centre aux points de contact est harmonique.

Remarque. — Les deux autres systèmes de cordes communes parallèles rencontrent chacun la tangente commune en deux points conjugués par rapport aux points de contact. Chacun de ces systèmes forme donc, avec les parallèles qu'on lui mène des points de contact, un faisceau harmonique ayant son sommet à l'infini.

Note. — La même question a été résolue par MM. Barthe et Clautrier, élèves du lycée de Poitiers; P. Ponsart, élève du lycée de Reims; A. Tourettes; Joseph Narino, élève du lycée de Marseille; Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Portail et Biard, élèves du lycée de Lille; H. Lez; C. Chadu.

Question 1214

(voir 2e série, t. XV, p. 288);

PAR M. BERTHOMIEU,

Élève du lycée de Bordeaux.

Lieu des centres des coniques touchant une droite en un point donné, et telles qu'un second point donné soit, par rapport à ces coniques, le pôle d'une autre droite aussi donnée. (GAMBEY.)

Solution analytique. — Je prends pour origine des coordonnées le premier point donné, pour axe des x la première droite, et pour axe des y une parallèle à la seconde droite.

L'équation générale des coniques tangentes à l'axe des x à l'origine est

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dy = 0.$$

Soient α et β les coordonnées du second point donné, et $x = \gamma$ l'équation de la seconde droite.

On aura le lieu des centres des coniques (1) en éliminant A, B, C et D entre les quatre relations

$$B\alpha + 2C\beta + D = 0,$$
$$2A\alpha\gamma + B\beta\gamma - D\beta = 0,$$
$$2Ax + By = 0,$$
$$Bx + 2Cy + D = 0.$$

Les deux dernières sont les équations du centre, et les deux premières expriment que la droite $x = \gamma$ a pour pôle le point (α, β).

Le résultat de l'élimination de A, B, C et D entre ces quatre équations est le déterminant des coefficients de ces paramètres égalé à zéro; telle est donc l'équation du

lieu

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & 1 \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 0 & \beta \\ x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant développé fournit pour l'équation du lieu

$$\beta^2 x^2 - \alpha\gamma y^2 + (\beta\gamma - \alpha\beta) xy + \beta(\alpha\gamma y - \beta\gamma x) = 0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(\beta x - \alpha y)(\gamma y + \beta x - \beta\gamma) = 0,$$

et qui, par conséquent, se décompose en

$$\begin{cases} \beta x - \alpha y = 0, \\ \gamma y + \beta x - \beta\gamma = 0. \end{cases}$$

Le lieu des centres se compose donc de deux droites : celle qui joint les deux points donnés et celle qui joint le point de rencontre des deux droites données à celui des parallèles menées par les deux points donnés à chacune de ces droites.

Solution géométrique. — La droite qui joint les deux points donnés est la polaire du point de rencontre des droites données. D'autre part, cette même droite est divisée harmoniquement par la conique, le pôle et la polaire donnés; elle rencontre donc la conique en deux points fixes, et la droite qui joint leur point milieu au point de rencontre des droites données doit, d'après une propriété connue, passer par le centre. C'est donc le lieu du centre, puisqu'elle est fixe.

Remarque. — On peut se demander d'où provient la solution

$$\alpha y - \beta x = 0,$$

fournie plus haut par le calcul, et que la Géométrie va nous indiquer.

Cette solution correspond au cas où l'équation (1) représente la droite double

$$\alpha y - \beta x^2 = 0.$$

Elle satisfait, en effet, à toutes les conditions énoncées. L'origine est un point double, et la droite $x = y$ peut être considérée comme la polaire du point (α, β), puisque cette dernière est indéterminée. Or le lieu des centres, dans ce cas, est bien la droite $\alpha y - \beta x = 0$ elle-même.

Note. — La même question a été résolue par MM. Dewulf; Moret-Blanc; C. Chadu; H. Lez; Demartres; Wisselink; G. Lambiotte, élève de l'Athénée royal de Liége; H. Lassenon et A. Devos, élèves du Lycée de Lille; Suffiseau et Augustin, élèves du lycée de Tours; Vincent Fiore, élève de l'Université de Naples; Portail et Leloutre, élèves du lycée de Lille; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; P. Souverain, élève du lycée de Moulins; A. Muffat, élève du lycée de Lyon, qui a généralisé la question; Ed. Guillet, soldat au 38e d'infanterie, à Montluçon.

Question 1215

(voir 2e série, t. XV, p. 336);

PAR M. GENTY.

Si l'on désigne par r, ρ et δ le rayon vecteur, le rayon de courbure et l'angle de déviation pour un point d'une courbe, et par r_1, ρ_1 et δ_1 les mêmes éléments pour le point correspondant d'une de ses transformées par rayons vecteurs réciproques, on a la relation

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \operatorname{tang}\delta = \left(\frac{r'}{\rho'}\right)^2 \operatorname{tang}\delta'.$$

(FOURET.)

On sait que l'angle de déviation est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{d\rho}{3\,ds}.$$

Soit p la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à la courbe donnée, p_1 la perpendiculaire abaissée sur la tangente à la courbe transformée, a le rayon du cercle d'inversion ; on a

$$r_1 = \frac{a^2}{r},$$

$$\rho_1 = \frac{r_1\, dr_1}{dp_1} = \frac{r_1\, dr_1}{d\left(\frac{a^2 p}{r^2}\right)} = -\frac{a^2 \rho}{r^2 - 2p\rho},$$

en remarquant que l'on a

$$\rho\, dp = r\, dr;$$

on a ensuite

$$d\rho_1 = -a^2 \frac{r^2\, d\rho}{(r^2 - 2p\rho)^2},$$

$$ds_1 = \frac{a^2\, ds}{r^2} :$$

donc enfin

$$\operatorname{tang} \delta_1 = \frac{d\rho_1}{3\, ds_1} = -\frac{r^4\, d\rho}{3\, ds\, (r^2 - 2p\rho)^2},$$

et

$$\left(\frac{r_1}{\rho_1}\right)^2 \operatorname{tang} \delta_1 = -\frac{a^4 (r^2 - 2p\rho)^2 r^4\, d\rho}{3 r^2 a^4 \rho^2\, ds\, (r^2 - 2p\rho)^2}$$

$$= -\frac{r^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{3\, ds} = -\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 \operatorname{tang} \delta.$$

Note. — Solution analogue par M. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa, et M. Moret-Blanc.

Question 1216

(voir 2e série, t. XV, p. 336);

PAR M. P. SONDAT.

Si, du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole, on décrit un cercle passant par les foyers, ce cercle coupera l'axe perpendiculaire à l'axe focal en deux points

tels, que la somme des carrés de leurs distances à une tangente quelconque est constamment égale à la moitié du carré de l'axe focal. (LEZ.)

Soit

$$y - mx + \sqrt{a^2m^2 \pm b^2} = 0$$

l'équation d'une tangente quelconque à une conique à centre.

La circonférence concentrique passant par les foyers rencontre l'axe non focal aux points C', dont les distances à la tangente sont

$$\mathrm{CD} = \frac{c + \sqrt{a^2m^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$\mathrm{C'D'} = \frac{-c + \sqrt{a^2m^2 \pm b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on a

$$\overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{C'D'}}^2 = \frac{2(c^2 \pm b^2 + a^2m^2)}{1 + m^2},$$

ou

$$\overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{C'D'}}^2 = 2a^2.$$

C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues par MM. Liguine, professeur à l'Université d'Odessa; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; G. Lambiotte, élève de l'Athénée royal de Liége; Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; J. Griess, à Zurich; Wisselink; A. Minozzi, à Naples; C. Chadu; E. Kruschwitz; Wladimir Habbé; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; A. Muffat, élève du lycée de Lyon; Joanny Billiet, élève du lycée de Lyon; Wladimir de Tannenberg, élève de Mathématiques préparatoires au lycée Louis-le-Grand. M. Wladimir de Tannenberg a également envoyé une solution géométrique.

Question 1185

(voir 2e série, t. XIV, p. 432);

PAR M. DEMARTRES,
Professeur au collége de Soissons.

Une surface du second ordre étant circonscrite à un tétraèdre, on mène par un point de la surface une parallèle à l'une des arêtes. Soient ρ, ρ' *les segments déterminés sur cette droite par le tétraèdre,* D *le diamètre de la surface qui lui est parallèle. Démontrer que l'expression* $\sum \frac{\rho\rho'}{D^2}$, *étendue aux six arêtes, est nulle.*

(H. FAURE).

Soient a, b, c, d les sommets du tétraèdre ; A, B, C, D les faces ; m un point de l'espace ; α, β, γ, δ ses distances aux quatre faces ; v le volume du tétraèdre ; h_1, h_2, h_3, h_4 ses hauteurs.

Menons par m une parallèle à ab ; cette droite rencontrera les deux faces A et B. Soient ρ et ρ' les segments comptés à partir de m. On a évidemment

$$\frac{\rho}{\alpha} = \frac{ab}{h_1}, \quad \frac{\rho'}{\beta} = \frac{ab}{h_2};$$

d'où

$$\rho\rho' = \frac{\overline{ab}^2}{h_1 h_2}\alpha\beta = \frac{\overline{ab}^2}{9v^2}\mathrm{AB}\,\alpha\beta.$$

On sait d'ailleurs que, dans tout tétraèdre, on a

$$\frac{\sin(ab)}{\overline{ab}} = \frac{3v}{2\mathrm{CD}},$$

et l'on aura alors

$$\rho\rho' = \frac{2\mathrm{ABCD}}{27v^3}\,\overline{ab}\,\alpha\beta\sin(ab).$$

Si l'on ajoute toutes les équations analogues, on aura

$$(1) \qquad \Sigma \rho\rho' = \frac{2}{27}\,\frac{\text{ABCD}}{v^3}\,\Sigma\,\overline{ab}\,\alpha\beta\sin(ab).$$

Or la seconde somme est le premier membre de l'équation tétraédrique de la sphère circonscrite; donc :

Pour que $\Sigma\rho\rho' = 0$, *il faut et il suffit que le point m soit sur la sphère circonscrite au tétraèdre.*

Supposons cette condition remplie, et transformons homographiquement la figure de manière que la sphère devienne un ellipsoïde concentrique E. On sait (CHASLES, *Mémoire sur la dualité et l'homographie*) que les segments qui figurent dans une relation homogène doivent être divisés par les diamètres parallèles de l'ellipsoïde; on aura donc

$$\sum \frac{\rho\rho'}{\text{D}^2} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE I. — La démonstration est évidemment applicable aux hyperboloïdes, car un ou deux des coefficients de la transformation homographique peuvent être imaginaires.

REMARQUE II. — L'équation précédente peut être considérée comme l'équation même de l'ellipsoïde dans un système particulier de coordonnées; en y remplaçant $\rho\rho'$ par la valeur (1), on aurait l'équation en coordonnées tétraédriques.

Note. — Autre solution par M. Genty.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XV, 2ᵉ SÉRIE.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Correspondance.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XV, 2e SÉRIE.)

Pages.

2335 Paris. Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

